

Done
to

Cut by the



ملتی متغیر کے تفاعل

Mulraj Mutaghair Ka
Jafaul

Sastwaker, J. T.



سلسلہء کتابت علم معارف اسلامیہ

نشان ۳۶۱

ملف متغیر کے تفاعل

Functions of a Complex Variable

برائے بی اے

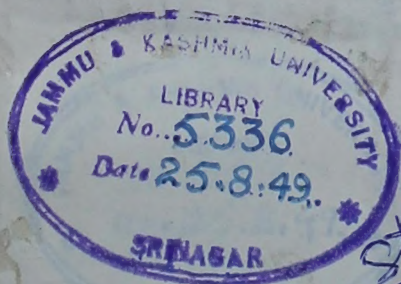
مترجم

جسے تیرتھ ساستور کر صاحب
لکچرار ریاضی کئیہ بلده حیدرآباد دکن
بعد نظر ثانی

محمد خواجہ محی الدین صاحب
ریڈر شعبہ ریاضی جامعہ عثمانیہ

۱۳۶۶ھ ۱۳۵۶ھ ۱۳۴۶ھ ۱۹۲۶ء
مطبوعہ

الطبعة الأولى ۱۳۶۶ھ ۱۳۵۶ھ ۱۳۴۶ھ ۱۹۲۶ء



St. 82

510
P975

cel

دیس پاچہ

(*)

مجلس نصاب ریاضی جامعہ عثمانیہ نے سہ ماہی میں بی۔ اے کے ریاضی کے نصاب پر جو نظر ثانی کی، اس کے نتیجہ کے طور پر ملتف متغیر کے نظریہ کو ریاضی کے نصاب میں داخل کیا گیا۔ اردو زبان میں اس نظریہ پر بی۔ اے کے معیار کی کوئی کتاب موجود نہیں ہے اور نہ کسی انگریزی کتاب کا اردو ترجمہ ایسا شائع ہوا ہے جس سے طلبہ مستفید ہو سکیں۔ موجودہ تالیف کا مقصد طلبہ کی اسی شدید ضرورت کی تکمیل ہے۔

اس تالیف کو (Macrobert) کی انگریزی کتاب (Functions of a Complex Variable) کے اساس پر مرتب کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔

علاوہ ازیں دیگر مستند انگریزی کتابوں سے معیاری سوالات اخذ کر کے اس میں شامل کیے گئے ہیں تاکہ نفس مضمون اچھی طرح طلبہ کے ذہن نشین ہو سکے۔ سررشتہ ہذا کے ایما پر مسٹر جے تیرتھ ساستورکر ام۔ اے۔ لکچرار ریاضی کلیمہ لدہ نے اس تالیف کو پروفیسر کشن چند صاحب صدر شعبہ ریاضی جامعہ عثمانیہ کے مشورہ کے مطابق مرتب کیا ہے۔ صاحب موصوف اور محمد خواجہ محی الدین صاحب نے اس کتاب کی نظر ثانی کی زحمت بھی گوارا فرمائی ہے جو ہمارے شکریہ کے مستحق ہیں۔ ریاضی کی کئی ایک مفید تالیفات اس وقت سررشتہ ہذا میں زیرِ تالیف و طبع ہیں جن کی اشاعت سے اردو زبان میں بیش بہا فنی معلومات کے اضافے کی توقع کی جاسکتی ہے۔

محمد نظام الدین

ناظم سررشتہ تالیف ترجمہ جامعہ عثمانیہ

المترجم یکم فروری ۱۳۳۵ھ

فہرستِ امین

باب اول

ملطف اعداد اور اُن کی ہندسی تعبیر

صفحہ

نشانِ سلسلہ

- | | | |
|----|-------|---|
| ۱ | (۱) | ملطف اعداد کی تعریف |
| ۳ | (۲) | آرگینڈ کی شکل |
| ۴ | (۳) | ملطف عدد کی سمتی تعبیر |
| ۶ | (۴) | دو ملطف عددوں کے جمع و تفریق کی ہندسی تعبیر |
| ۹ | (۵) | ضرب و تقسیم |
| ۱۱ | (۶) | دو ملطف عددوں کے ضرب و تقسیم کی ہندسی تعبیر |

۱۶

اشکلہ نمبری (۱)

باب دوم

ڈی مائرے کا مسئلہ

۲۰

(۷) ڈی مائرے کا مسئلہ

(۸) ڈی مائرے کے مسئلہ سے نتائج

(۹) اکائی کے ن جذر

(۲) مسئلہ نمبری

باب سوم

لا اتنا ہی سلسلے قوت نمائی۔ لوکارتمی۔ اُری اور زائدی تفاعل

(۱۰) ملتف ارقام کے سلسلہ کا مطلق استدقاق

(۱۱) قوت نمائی سلسلہ

(۱۲) دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں

(۱۳) ملتف عدد کے لوکارتم

(۱۴) تفاعل اُری

دائری اور زائدی تفاعل

سلسلوں کو جمع کرنا

(۳) مسئلہ نمبری

باب چہارم

ملتف متغیر کے تفاعل

(۱۵) ملتف متغیر کی تعریف

(۱۶) تغیر کا راستہ

(۱۷) یک قیمتی اور کثیر قیمتی تفاعل

(۱۸) انتہائیں

ی مائل۔ لا اتنا ہی تفاعل کی انتہا

صفحہ

نشان

۶۰

لا تناسبی انتہائیں

۶۰

تسل

(۱۹)

۶۰

یکساں تسل

۶۱

تفریق

(۲۰)

۶۲

تحلیلی تفاعل

(۲۱)

۶۳

کوشی ربمان کی مساواتیں

۶۸

مزدوج تفاعل

(۲۲)

۶۹

لا ملاس کی مساوات

۶۹

تحلیلی تفاعل معلوم کرنا جبکہ اس کا حقیقی یا خیالی حصہ دیا گیا ہو

۷۱

تحلیلی تفاعل معلوم کرنے کا ملنے تھا من کا طریقہ

(۲۳)

۷۲

منحنی ء = مستقل اور و = مستقل

(۲۴)

۷۷

نادر نقطے

(۲۵)

۷۹

قطب

۷۹

صفر نقطے

۷۹

مقلوب تفاعل

(۲۶)

امثلہ نمبری (۳)

باب پنجم

مساواتوں کی اصلیں - شاخ اور شاخ نقطے

۸۲

مساواتوں کا نظریہ

(۲۷)

۸۷

تفاعلوں کی ہندسی تعبیر

(۲۸)

۹۱

مساواتوں کی اصلیں

(۲۹)

۹۸

کثیر قیمتی تفاعل

(۳۰)

۱۰۲

(۳۱) ترقیمی کھٹ اور ریمان کی سطح

امثلہ نمبری (۵)

باب ہشتم

ابدال اور ہم شکل تعبیر

۱۰۸

(۳۲) ابدال

۱۱۱

لاقتناہی پر کا نقطہ

۱۲۰

(۳۳) ہم شکل تعبیر

امثلہ نمبری (۶)

باب ہفتم

ملف تکمیل اور کوشی کا مسئلہ

۱۳۵

(۳۴) منحنی تکملہ

۱۳۷

(۳۵) ملف متغیر کا محدود تکملہ

۱۴۰

(۳۶) گرین کا مسئلہ

۱۴۲

ضعفی طور پر لے ہوئے خطے

۱۴۲

(۳۷) کوشی کا تکمیلی مسئلہ

۱۵۳

ٹیلر کا مسئلہ

۱۵۴

(۳۸) باقی کی تعریف

۱۵۵

لاقتناہی پر باقی

۱۵۹

(۳۹) کوشی کا مسئلہ باقی

۱۶۳

(۴۰) اکائی نصف قطر کے دائرہ کے گرد تکمیل

امثلہ نمبری (۷)

باب ہشتم

لاتناہی سلسلے اور اُن کا استدقاق

- ۱۷۷ (۳۱) قوا ترک کی انتہا
- ۱۷۸ قوا ترکوں کا یکساں استدقاق
- ۱۸۱ (۳۲) سلسلوں کا استدقاق
- ۱۸۱ مطلق استدقاق
- ۱۸۲ سلسلوں کا حاصل ضرب
- ۱۸۵ (۳۳) دوہر سلسلہ
- ۱۸۶ دوہر سلسلہ کا استدقاق
- ۱۸۹ (۳۴) یکساں استدقاق
- ۱۹۱ (۳۵) قوتی سلسلے
- ۱۹۲ دائرہ استدقاق اور نصف قطر استدقاق
- ۱۹۳ قوتی سلسلوں کا حاصل ضرب
- ۱۹۴ (۳۶) لاتناہی حاصل ضرب

امثلہ نمبری (۸)

باب اول

ملقف اعداد اور ان کی ہندی تعبیر

۱۔ ملقف اعداد کی تعریف۔ کوئی عدد جو (۱ + خ ب) کی شکل کا ہو، جہاں ۱ اور ب حقیقی عدد ہیں اور خ، ۱-۱ ہے ملقف عدد کہلاتا ہے۔ اگر ب = صفر تو عدد کو خالص حقیقی اور ۱ = صفر تو اس کو خالص خیالی کہتے ہیں۔ اگر ۱ + خ ب = صفر تو ۱ = ب = صفر و نہ خ = -۱، یعنی ایک خالص حقیقی عدد = ایک خیالی مقدار کے جو صریحاً ناممکن ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر دو ملقف اعداد مساوی ہوں تو وہ متماثل مساوی ہونگے، کیونکہ اگر (۱ + خ ب) = (۱ + خ ب') تو (۱ - ۱) + خ (ب - ب') = صفر اور اوپر سے حاصل ہوتا ہے کہ ۱ = ۱ اور ب = ب'۔

ہم عام ملقف عدد (ی) کی بجائے (لا + خ ما) لکھیں گے۔ ملقف اعداد (لا + خ ما) اور (لا - خ ما) جن کے حقیقی حصے وہی ہیں۔ لیکن خیالی حصے مساوی اور مختلف علامت ہیں، مزدوج اعداد کہلاتے ہیں۔ ان کا مجموعہ ۲ لا حقیقی ہے۔ اور فرق (۲ خ ما) خالص خیالی ہے۔ ان کا حاصل ضرب (لا + خ ما) (لا - خ ما) = لا^۲ - (خ ما)^۲ = لا^۲ + ما^۲ منفی نہیں ہو سکتا

ان کا حاصل ضرب صفر اُسی وقت ہوتا ہے جبکہ لا = ما = صفر، ہم ی کے مزدوج کو ی سے تعبیر کریں گے۔

ی کا مقیاس جس کو ای | لکھتے ہیں کی تعریف $(لا + لا + لا + \dots)$ سے کی جاتی ہے۔ تعریف سے ظاہر ہے کہ ای | = صفر اُسی وقت ہوتا ہے جبکہ

لا = ما = صفر

ابتدائی اعمال :- اگر ی = لا + خ ما اور ی = لا + خ ما تو ہم حسب ذیل تعریفات کرتے ہیں۔

$$(۱) ی + ی = (لا + لا) + خ (ما + ما)$$

$$(۲) ی - ی = (لا - لا) + خ (ما - ما)$$

$$(۳) ی - ی = (لا - لا) + خ (ما - ما)$$

(۴) ی ی = (لا + لا + لا + \dots) + خ (ما + ما + ما + \dots) = (لا لا - لا لا - لا لا - \dots) + خ (لا لا + لا لا + لا لا + \dots)

ابتدائی اعمال کی اس تعریف سے ہم دیکھتے ہیں کہ جبر و مقابلہ کے اساسی اصول ملتف اعداد سے بھی پورے ہوتے ہیں۔

(۱) جمع کے مبادلت پذیر (Commutative) اور تلازمی (Associative) اصول برقرار رہتے ہیں۔

$$۱ ی + ۲ ی = ۲ ی + ۱ ی$$

$$۱ ی + (۲ ی + ۳ ی) = (۱ ی + ۲ ی) + ۳ ی = ۳ ی + ۱ ی + ۲ ی$$

(ب) حاصل ضرب کے بھی وہی اصول برقرار رہتے ہیں۔

$$۱ ی ۲ ی = ۲ ی ۱ ی$$

$$۱ ی (۲ ی ۳ ی) = (۱ ی ۲ ی) ۳ ی = ۳ ی ۱ ی ۲ ی$$

(ج) تقسیمی Distributive قاعدہ درست رہتا ہے۔

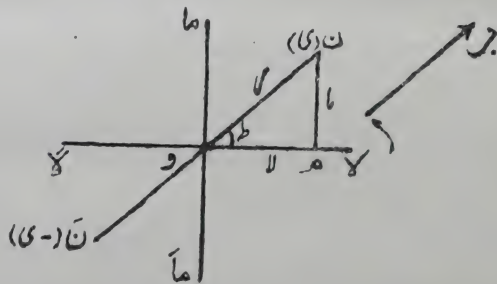
$$(۱ ی + ۲ ی) ۳ ی = ۳ ی ۱ ی + ۳ ی ۲ ی$$

مثال کے طور پر ہم حاصل ضرب کا مبادلت پذیر اصول ثابت کرتے ہیں۔ دوسرے قاعدوں کو بھی اس طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$۱ ی ۲ ی = (لا + لا + لا + \dots) (لا + لا + لا + \dots) = (لا لا + لا لا + لا لا + \dots) + خ (لا لا + لا لا + لا لا + \dots)$$

$= (لام\ لا - لام\ ما) + (لام\ ما + لام\ لا) = ی\ ۲$
 ہم دیکھتے ہیں کہ ملطف اعداد کے درمیان درجہ (Order) نہیں ہوتا۔ ملطف اعداد کے لیے ایک ملطف عدد دوسرے ملطف عدد سے بڑا ہے یا چھوٹا ہے کوئی معنی نہیں رکھتا۔ ملطف اعداد کی صورت میں لا تساویات صرف مقیاسوں کے درمیان ترتیب میں واقع ہو سکتی ہیں۔

۲۔ آرگینڈ کی شکل: قائم محوروں کے نظام لا ولا، ما وما کے
 مستوی میں نقطہ ن کو مرسم کرو۔ جہاں نقطہ ن کے محدود ان محوروں کے حوالہ سے (لا، ما) ہیں (شکل ۱)۔ تب ہم اس نقطہ کو عدد (لا + خ ما) کو تعبیر کرنے



شکل (۱)

کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ مستوی میں ہر ایک عدد کے جواب میں ایک اور صرف ایک نقطہ ہے۔ لا محور پر کے نقاط خالص حقیقی اعداد کو اور ما محور پر کے نقاط خالص خیالی اعداد کو ظاہر کرتے ہیں اور مبداء نقطہ صفر کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم کو کوئی عدد (لا + خ ما) دیا جائے تو ہم اس کے متناظر محدود (لا، ما) معلوم کر سکتے ہیں اور عدد کو اس نقطہ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

جس شکل میں اعداد تعبیر کیے جاتے ہیں اُس کو آرگینڈ کی شکل کہتے ہیں۔ یہ عام طور پر رائج ہے کہ (لا + خ ما) کی بجائے ی لکھا جائے اور اس

مستوی کوئی کا مستوی کہیں -

و کو مبداء اور ولا کو ابتدائی خط قرار دو - نیز فرض کرو کہ نقطہ ن کے

قطبی محدّد (س، طہ) ہیں - تب $س = ون = لا + ما$

$$\text{جم طہ} = \frac{لا}{س} \quad \text{جب طہ} = \frac{ما}{س}$$

اور $ی = (لا + خ + ما) = س$ (جم طہ + خ جب طہ)

ون یا ر کوئی کا مقیاس کہتے ہیں اور لکھتے ہیں ای - س سے ون

کی مثبت قیمت تعبیر ہوتی ہے -

طہ کوئی کی دلیل کہتے ہیں اور اس کو لکھتے ہیں دلیل (ی) - یہ ظاہر ہے کہ

دلیل کی قیمتوں کی مقدار لا انتہا ہے ان میں سے کسی دو قیمتوں کا فرق π کا کوئی ضعف ہوتا ہے - اُس قیمت کو جولا تساویات $\pi > طہ \geq \pi$ کو پورا

کرتی ہے دلیل کی صدر قیمت کہتے ہیں -

قائم اور قطبی محدّد باہم رشتوں $لا = س$ جم طہ $ما = س$ جب طہ

$$س = لا + ما + س \quad \text{اور مس طہ} = \frac{ما}{لا} \quad \text{سے مربوط ہیں -}$$

ان سے حاصل ہوتا ہے کہ $ی = لا + خ + ما = س$ (جم طہ + خ جب طہ)

یہ ایک مساوات ہے جو ی کو اُس کے مقیاس اور دلیل کی رقوم میں بیان کرتی ہے

۳ - ملف عدد کی سمتی تعبیر -

اگر س اور طہ دیے ہوئے ہوں تو نقطہ ن کو یگانا طور پر معلوم کیا جاسکتا ہے

اور ہم عددی کو ایک سمتیہ کے ذریعہ جس کا طول س ہو اور جو لامحور کی مثبت سمت

کے ساتھ زاویہ طہ بنائے، ظاہر کر سکتے ہیں - یہ ضروری نہیں ہے کہ سمتیہ کو مبداء

میں سے ہی کھینچا جائے لیکن یہ خط مستوی میں کہیں ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس کا

طول اور اس کی سمت مناسب ہو - یعنی اگر نقطہ ن عددی، کو ظاہر کرے تو سمتیہ

ون بھی عددی کو تعبیر کرے گا - اس کے علاوہ ایک خط اب کو بھی جو ون

کے مساوی اور متوازی ہے اور ون کی سمت میں کھنچا ہوا ہے عددی کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اب کو سمتیہ کہتے ہیں شکل (۱) یہ ظاہر ہے

اب = - ب

اس لیے معلوم ہوا کہ ملطف عدد کو ظاہر کرنے کے لیے دو طریقے اختیار کیے جاسکتے ہیں۔ ایک تو اس کو آرگینڈ کی شکل میں ایک نقطہ سے اور دوسری مستوی میں ایک سمتیہ سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ عام طور پر دونوں طریقے استعمال کیے جائیں اور محض ایک کو چھوڑ کر دوسرا نہ اختیار کریں۔

مثلاً شکل (۱) میں نقطہ ن جس کے محدد (لا، ما) ہیں عددی = (لا، خ، ما) کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز سمتیہ ون بھی اس عدد کو تعبیر کرتا ہے۔ عدد (ی) نقطہ ن سے تعبیر ہوتا ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں اور اس کا متناظر سمتیہ ہے ون جو ون کے مساوی ہے مگر اس کی سمت، ون کی سمت کے مخالف ہے۔

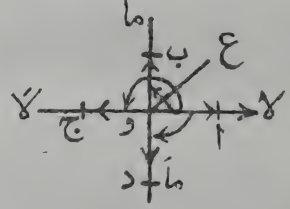
مثال (۱) :- آرگینڈ کی شکل میں اعداد (۱) (خ) (۱-ا) اور (خ-)

بالترتیب نقاط 'ب' 'ج' اور 'د' (شکل ۲) سے ظاہر کیے گئے ہیں اور اس کے متناظر سمتیہ ہیں 'و' 'ب' 'ج' اور 'د' جن میں سے ہر ایک کا ہول اکائی ہے اور ان کے دلیل کی سمتیں صفر $\frac{\pi}{4}$ ، π ، $\frac{3\pi}{4}$ ہیں اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$1 = (\text{جم صفر} + \text{خ جب صفر})$$

$$\text{خ} = 1 (\text{جم} \frac{\pi}{4} + \text{خ جب} \frac{\pi}{4})$$

شکل (۲)



$$1 = 1 (\text{جم} \pi + \text{خ جب} \pi) - \text{خ} = 1 (\text{جم} \frac{3\pi}{4} + \text{خ جب} \frac{3\pi}{4}) - \text{خ}$$

عدد (۱+خ) نقطہ ع سے تعبیر کیا گیا ہے۔ جس کے محدد (۱، ۱) ہیں اس لیے

$$وع = ۲۶، اور لا و ع = \frac{\pi}{۳}، اس لیے (۱ + خ)$$

$$= ۲۶ (جم \frac{\pi}{۳} + خ جب \frac{\pi}{۳})$$

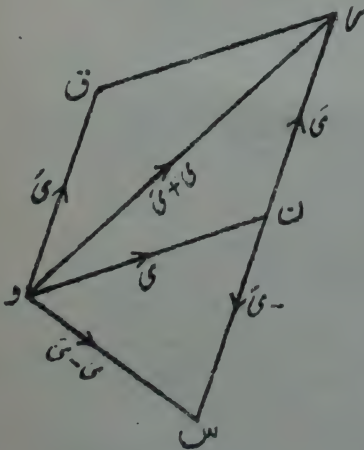
مثال (۲) :- اس نقطہ ی کا طریق دریافت کرو، جو اس طرح بدلتا ہے کہ ای = ۱ ج، جہاں ج ایک حقیقی مثبت مستقل ہے۔
اس شرط کا ہندسی مفہوم یہی ہے کہ مبداء سے نقطہ ی کا فاصلہ ہمیشہ ج کے مساوی ہے۔ اس لیے ی کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز مبداء پر ہے اور نصف قطر ج ہے۔

مثال (۳) :- اگر ی اس طرح بدلے کہ ی کی دلیل ہمیشہ مستقل رہے، تو ی کا طریق معلوم کرو۔ ظاہر ہے کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہوگا۔ مبداء سے گزرتا ہے۔

۴۔ دو ملف عددوں کے جمع اور تفریق کی ہندسی تعبیر

فرض کرو کہ ن اور ق، بالترتیب نقاط ی = لا + خ ما اور ی = لا + خ ما

ہیں (شکل ۳) متوازی الاضلاع ون ساق کو مکمل کرو۔ اب ن ما اور وق مساوی اور متوازی ہیں اس لیے حوالہ کے محوروں پر انکے نکل مساوی ہیں اس لیے نقطہ س کے متحدہ ہیں (لا + لا، ما + ما)۔ اس لیے س، ن اور ق سے تعبیر ہونے والے عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ سمتیوں کی ترقیم میں
 $وس = ون + وق$
دو ملف عددوں کے فرق کو



شکل (۳)

ظاہر کرنے کے لیے ہم اوپر کا جمع کا عمل عددوں (لا + خ ما) اور - (لا + خ ما) پر کرتے ہیں اس لیے اگر سران کو س تک خارج کیا جائے تو
 ن س = ن سر طول میں ، سمیت ن س جو ق کے مساوی
 اور مخالف سمت میں ہے - (لا + خ ما) کو تعبیر کرتا ہے - تب

$$\text{وس} = \text{ون} + \text{ن س}$$

اور اس لیے وس عدد { (لا + خ ما) - (لا + خ ما) } کو ظاہر کرتا ہے ۔

یہ ضروری نہیں ہے کہ عمل کے لیے مبداء کا انتخاب کریں ۔
 چونکہ مثلث کا ایک ضلع مثلث کے دوسرے دو ضلعوں کے مجموعہ
 سے بڑا نہیں ہو سکتا ۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ون} + \text{ن س} \leq \text{وس}$$

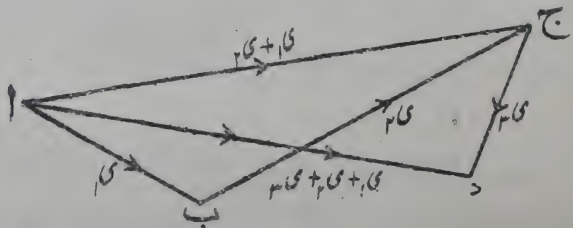
$$\text{اور اس لیے ای} + \text{ای} \leq \text{ای} + \text{ای}$$

اس نتیجہ کو ہم لکھ سکتے ہیں -

دو ملطف مقداروں کے مجموعے کا مقیاس ان کے علیحدہ علیحدہ مقیاسوں

کے مجموعے سے کم یا مساوی ہوتا ہے۔ دو ملطف عددوں کو جمع کرنے کے اس
 عمل کو کسی تعداد کے لیے بڑھایا جاسکتا ہے ۔

فرض کرو کہ سمیتے ا ب ، ب ج ، ج د (شکل ۴) بالترتیب



شکل (۴)

ی، ی، ی، ی کو تعبیر کرتے ہیں۔

تب آج عدد (ی، ی + ی) کو ظاہر کرتا ہے۔ اور آد عدد (ی، ی + ی + ی + ی) کو ظاہر کریگا۔

چونکہ آد کا طول آب، بج اور ج د کے طول سے بڑا نہیں ہو سکتا

اس لیے | ی | + | ی | + | ی | + | ی | ≤ | ی | + | ی | + | ی |

اسی طرح کا عمل ن عددوں کے ساتھ کرنے سے ہم کو ذیل کا اہم مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ ۱:- ملف مقداروں کے کسی تعداد کے مجموعے کا مقیاس، اُن کے مقیاسوں کے مجموعے کے مساوی یا اُن سے کم ہوتا ہے۔

ملف مقداروں کے مقیاسوں کے متعلق حسب ذیل مسئلہ بھی غور طلب ہے۔ طالب علم اس مسئلہ کی تصدیق خود کرے۔

مسئلہ ۲:- دو ملف مقداروں کے فرق مقیاس، اُن کے مقیاسوں کے فرق کے مساوی یا اُن سے بڑا ہوتا ہے۔

مثال ۴:- وہ سمتیہ جو آرگینڈ کی شکل میں نقاط ۱ اور ۲ کو ملاتا ہے اور جس کی سمت ۱ سے ۲ کی طرف ہوتی ہے عدد (۱ - ۲) کو تعبیر کرتا ہے اور اس کا طول ہوتا ہے | ۱ - ۲ |۔ اگر ۱ مستقل ہو اور ۲ اس طرح بدلے کہ | ۱ - ۲ | مستقل ہو تو ۲ کی طریق ایک دائرہ ہوگا جس کا مرکز ۱ پر ہے۔

اگر ۱، کوئی دوسرا مستقل ہو اور ۲ اس طرح بدلے کہ

$$| ۱ - ۲ | + | ۱ - ۲ | = \text{مستقل}$$

تو ۲ کی طریق ایک ناقص ہے جس کے ماسکے ۱ اور ۲ ہیں۔

مثال ۵:- فرض کرو کہ آب ج کوئی مثلث ہے تب سمتیہ

ب ج ' ج ۲ اور ا ب تین ملف اعداد کو تعبیر کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر ہے۔ یہی نتیجہ ن ضلعوں والے بند کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے

۵۔ ضرب اور تقسیم — دو ملف عددوں کا حاصل

ضرب اور خارج قسمت بھی ملف اعداد ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ دو ملف اعداد ی اور ی ہیں تب

$$(لا + خ م) (لا + خ م) = (لا - م م) + خ (لا م + لا م)$$

$$\frac{لا + خ م}{لا + خ م} = \frac{(لا + خ م) (لا - م م) + خ (لا م + لا م)}{لا + خ م} \text{ اور } \frac{لا + خ م}{لا + خ م} = \frac{(لا - م م) + خ (لا م + لا م)}{لا + خ م}$$

اب اس طریقہ عمل کو ہندسی طریقہ پر غور کرو۔ کسی دو ملف عددوں ی اور ی کو ہم شکل

ی = س {جم طہ + خ جب طہ} اور ی = س {جم طہ + خ جب طہ} میں لکھ سکتے ہیں۔

جہاں س = ای | اور س = ای | ی | طہ = دلیل ی اور طہ = دلیل ی اس لیے ی × ی = س س (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ)

$$= س س \{ (جم طہ جم طہ - جب طہ جب طہ + خ (جب طہ جم طہ + جم طہ جب طہ) \}$$

$$= س س \{ جم طہ طہ + خ جب طہ طہ \}$$

اس لیے ای ی = س س = ای × ای

اور دلیل ی ی = دلیل ی + دلیل ی [جبکہ دلیل کی صد قیمت لگئی ہے]

$$\frac{س (جم طہ + خ جب طہ)}{س (جم طہ + خ جب طہ)} = \frac{س (جم طہ - خ جب طہ)}{س (جم طہ - خ جب طہ)}$$

$$\text{مس} \{ (\text{جم طہ حم طہ} + \text{جب طہ جب طہ}) + \text{خ} (\text{جب طہ جم طہ} - \text{جب طہ جم طہ}) \}$$

$$\text{مس} \{ \text{جم طہ} + \text{جب طہ} \}$$

$$= \left(\frac{\text{مس}}{\text{مس}} \right) \{ (\text{جم طہ} - \text{طہ}) + \text{خ جب طہ} - \text{طہ} \}$$

$$\text{اس لیے } \left| \frac{\text{ی}}{\text{ی}} \right| = \frac{\text{مس}}{\text{مس}} = \frac{\text{ای}}{\text{ای}}$$

اور دلیل $\left(\frac{\text{ی}}{\text{ی}} \right) = \text{دلیل ی} - \text{دلیل ی}$ [جبکہ دلیل کی صدر قیمت لی گئی ہے]

اس لیے دو ملف مقداروں کے حاصل ضرب کا مقیاس اور دلیل بالترتیب مقیاسوں کا حاصل ضرب اور اجزائے ضربی کے دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اور خارج قسمت کا مقیاس اور دلیل بالترتیب مقیاسوں کے خارج قسمت اور شمار کنندہ اور نسب نما کے دلیلوں کے فرق کے مساوی ہے۔

اگر ی اور ی سے تعبیر ہونے والے سمتیہ متوازی ہوں تو
(دلیل ی - دلیل ی) = صفر

[جبکہ سمتیہ کی سمتیں یکساں ہوں] یا $\pm \pi$ [جبکہ سمتیہ کی سمتیں مخالف ہوں]

ہر صورت میں خارج قسمت $\frac{\text{ی}}{\text{ی}}$ خالص حقیقی ہے۔ برعکس اس کے

اگر ی حقیقی ہوں تو سمتیہ ی اور ی متوازی ہونگے۔

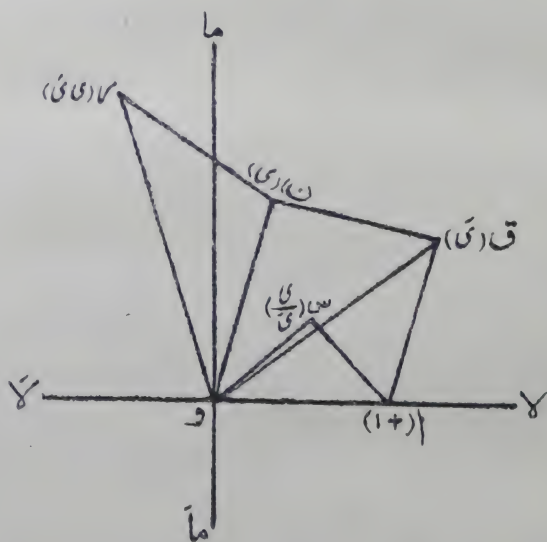
اگر سمتیہ ی اور ی علی القوائم ہوں تو ی اور ی کے دلیلوں کا فرق $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضعف ہے اور خارج قسمت خالص خیالی ہے۔ اس کا عکس بھی درست ہے۔

خاص طور پر ی کا متکافی

$$\left\{ \text{حجم} (-طه) + \text{خ جب} (-طه) \right\} \left(\frac{1}{\text{سر}} \right) = \frac{1}{\text{می}}$$

اور اس لیے ایک عدد اور اُس کے متکافی عدد کے دلیل کی صورتیں مقدّم
میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہوتی ہیں۔

۶۔ دو ملتف عددوں کے ضرب اور تقسیم کی ہندسی تعبیر —



تشکل (۵)

فرض کرو کہ شکل (۵) میں نقاط '۱'، '۲' اور '۳' بالترتیب دوں
 '۱'، '۲' اور '۳' کے مناظر ہیں۔ ایک مثلث '۱'، '۲' اور '۳' اس طرح بناؤ جو
 مثلث '۱'، '۲' اور '۳' کے راست متشابہ ہو۔

تب چونکہ $\frac{و س}{و ن} = \frac{و ق}{و ا}$ ائے ورا = $و ن \times و ق$
چونکہ و ا کا طول اکائی ہے۔

$$نیز ا و س = ا و ن + ن و س$$

$$= ا و ن + ا و ق$$

$$= دلیلی + دلیلی$$

اس لیے نقطہ سرا، عدد (ی ی) کو ظاہر کرتا ہے۔
اب مثلث و ا س کو مثلث و ق ن کے راست متشابه بناؤ۔

$$تب \frac{و س}{و ا} = \frac{و ن}{و ق}$$

$$اس لیے ا و س = ق و ن = دلیلی - دلیلی$$

اس لیے نقطہ س، خارج قسمت $\frac{ی ی}{ی ی}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

$$مثال ۱۶۔ ثابت کرو کہ دلیلی $\left(\frac{ا ج}{ا ب}\right) = ب ا ج$$$

فرض کرو کہ و ن اور و ق بالترتیب ا ب اور ا ج کے

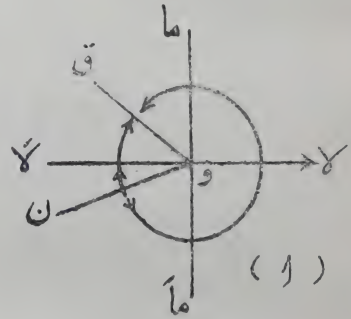
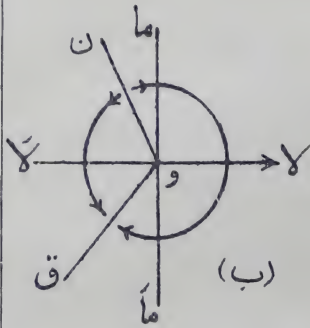
متوازی اُسی سمت میں کھینچے گئے ہیں۔

$$تب دلیلی $\left(\frac{ا ج}{ا ب}\right) = دلیلی ا ج - دلیلی ا ب$$$

$$= دلیلی و ق - دلیلی و ن$$

$$= ن و ق = ب ا ج$$

اگر اس طرح سے حاصل شدہ زاویہ مثبت { شکل ۶ (ا) } یا منفی { شکل ۶ (ب) } مکرر ہو، تو خارج قسمت کی دلیل کی صد قیمت پہلی صورت میں ۲۲ کی کمی سے



شکل (۶)

اور دوسری صورت میں ۲۲ کا اضافہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ حاصل شدہ دلیل پہلی صورت میں منفی اور دوسری صورت میں مثبت ہوتی ہے۔ ”قاعدہ کے طور پر جہاں کہیں دلیل کا ذکر آئے یہ مان لیا جائے کہ صد قیمت مراد ہے۔“

$$\text{مثال ۱: ثابت کرو کہ اگر دلیل } \Pi = \left\{ \frac{(۲ی - ۱ی)(۳ی - ۱ی)}{(۲ی - ۱ی)(۳ی - ۱ی)} \right\}$$

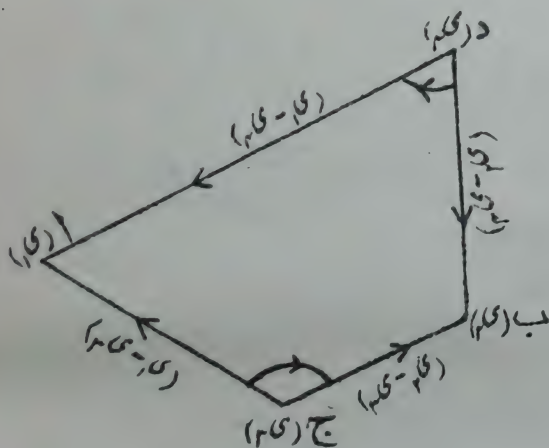
تو ۱م اور ۲م، ۱ا اور ۲ا کو ملانے والے خط کے مخالف جانبوں میں واقع ہونگے۔ اور ۱ا، ۲ا، ۱م اور ۲م ہم دائرہ ہیں۔

فرض کرو کہ ۱ا، ۲ا، ۱م اور ۲م بالترتیب نقاط شکل (۷) ا، ب، ج، د کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$\Pi = \frac{(۲ی - ۱ی)(۳ی - ۱ی)}{(۲ی - ۱ی)(۳ی - ۱ی)} + \frac{(۳ی - ۲ی)(۱ی - ۲ی)}{(۳ی - ۱ی)(۱ی - ۲ی)} = \left\{ \frac{(۳ی - ۲ی)(۱ی - ۲ی)}{(۳ی - ۱ی)(۱ی - ۲ی)} \right\}$$

اب عدد (۳ی - ۲ی) سمتیہ ج ب ہے۔

- عدد (۱ - ۱) سمیت $\frac{1}{1}$ ہے۔
 - عدد (۱ - ۱) سمیت $\frac{1}{1}$ ہے۔
 - اور عدد (۱ - ۱) سمیت $\frac{1}{1}$ ہے۔



شکل (۱۰)

$$\text{بج} = \frac{\text{بج}}{\text{ج}} = \text{دیل} = \left(\frac{۱ - ۱}{۱ - ۱} \right)$$

$$\text{بج} = \frac{\text{بج}}{\text{ج}} = \text{دیل} = \left(\frac{۱ - ۱}{۱ - ۱} \right)$$

بج اور بج کی سمتیں یکساں ہیں اور دیا گیا ہے کہ

$$\text{بج} + \text{بج} = ۱ = \text{بج}$$

کو ملانے والے خط کے مخالف جانب ہیں اگر ایک ہی جانب ہوتے تو بج اور بج کی قیمتیں علامت میں مختلف ہوتیں۔

اب چونکہ ذواربعتہ الاضلاع بج بج د میں مقابل کے

نیز ثابت کرو کہ اگر نقاط ل، م، ن، بالترتیب (ف، ب، ق، ج) پر اس طرح لیے جائیں کہ

$$\frac{ال}{لف} = \frac{بم}{مرق} = \frac{جن}{نر}$$

مثلث ل م ن، ۵۱ اب ج اور ف ق ر کے راست متشابه ہے۔

اگر مثلثات راست متشابه ہوں، تو زاویے ب ا ج، ق ف ر مساوی ہیں اور اسی سمت میں ہیں، نیز $\frac{اب}{فق} = \frac{ف ر}{ق ر}$ - یہ شرائط ضروری اور کافی ہیں۔

$$\text{اعداد (ج-۱) اور (۱-۱) پر غور کرو۔}$$

ان کے مقیاس بالترتیب $\frac{اب}{فق}$ اور $\frac{ف ر}{ق ر}$ اور ان کی دلیلین، زاویے ب ا ج اور ق ف ر ہیں جن کی سمتیں یکساں ہیں۔

اس لیے اگر مثلثات راست متشابه ہو، تو اوپر کے عددوں کے مقیاس مساوی ہیں اور دلیلین بھی مساوی ہیں۔ اس لیے یہ متماثل مساوی ہیں۔ لہٰذا اس کے اگر اعداد مساوی ہوں تو راست مشابہت کی شرائط پوری ہوتی ہیں۔ اس لیے مثلثات کو راست متشابه ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرائط

ہیں۔

$$\frac{ج-۱}{ب-۱} = \frac{۱-۱}{ق-۱} \text{ یا } (ق-۱) + (ب-۱) = (ف-۱) + (ج-۱) = \text{صفر} \dots (۱)$$

دوسرے حقہ کو مل کرنے کے لیے۔

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{\text{ا ل}}{\text{ن}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م ر ق}} = \frac{\text{ج ن}}{\text{ن م}} = \text{ک}$$

تب ل، م، ن، بالترتیب (ا + ک ف)، (ب + ک ق)، (ج + ک م) ہوگی۔ اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق کی جاسکتی ہے کہ، اگر 'ق'، 'م' کی بجائے ان مقداروں کو درج کیا جائے تو مساوات (ا) پوری ہوتی ہے۔ یعنی ل، م، ن، دوسرے دو مثلثوں 'ا ب ج' اور 'ق م ر' کے راست تشابہ ہے۔

امثلہ نمبری (۱)

(۱) آرگینڈ کی شکل میں حسب ذیل نقطوں کو ظاہر کرو:-

$$(۲ + ۳خ)، \frac{۱}{(۳ + ۲خ)}، \frac{۱ + ۳خ}{(۳ + ۲خ)}، \frac{۱}{(۳ + ۲خ)}، \frac{۱ + ۳خ}{(۳ + ۲خ)}، \frac{۱ + ۳خ}{(۳ + ۲خ)}$$

(۲) ثابت کرو کہ نقاط (۱)، (۲)، (۳) اور (۴) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ اُس مثلث کا نقطہ وسطیٰ جس کے راس 'ی'، 'ی'، 'ی' ہیں $\frac{۱ + ۲ + ۳}{۳}$ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اجمہ $۱ + ۳ = ۴$ جب $۱ = ۱$

(۵) ثابت کرو کہ دو مزدوج عددوں کے خارج قسمت کا مقیاس اکائی ہے۔

(۶) اگر $۱ = (۱ + ۳)$ تو ثابت کرو کہ $۱ \geq ۱$ اور $۱ \geq ۱$

(۷) ثابت کرو کہ دلیل (ی) - دلیل (ی) = $\pi \pm$ ، جو جب اس کے دلیل ی مثبت ہے یا منفی

(۸) اگر $۱ = ۱$ اور دلیل (ی) + دلیل (ی) = صفر، تو ثابت

کرو کہ ی، اور ی، مزدوج اعداد ہیں۔

(۹) حسب ذیل طریق کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

$$(۱) \quad ۱ + ۱ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$(ب) \quad \frac{\pi}{۲} = \left\{ \frac{(۱-۱)}{(۱+۱)} \right\}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جس کے راس ی،، ی،، ی، ہیں

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(۱-۱)}{(۱+۱)} \right\}$$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر دلیل $\frac{(۱-۱)}{(۱+۱)} = \frac{(۱-۱)}{(۱+۱)}$ تو نقاط

ی، اور ی،، ی، اور ی، کو ملانے والے خط کے ایک ہی جانب ہیں اور ی،، ی،، ی، ہم دائری ہیں۔

(۱۲) فرض کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' نقاط ی،، ی،، ی، اور ی، ہیں ثابت

کرو کہ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' مشترک محیط ہیں اور مثلثات 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' متشابہ ہیں۔

(۱۳) اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$ اور اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' نقاط

ی،، ی،، ی،، ی، ہوں تو ثابت کرو کہ

'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' مشترک محیط ہیں اور (ی، + ی،) (ی، + ی،)

$= (۱+۱) (۱+۱) = ۴$ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مثلثات 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د'

متشابہ ہیں جہاں 'ا'، 'ب' کا وسطی نقطہ ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ اگر 'ی'، 'ی'، 'ی' مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہوں تو

$$۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

(۱۵) اگر 'ی'، 'ی'، 'ی' قائمہ الزاویہ مثلث مساوی الساقین کے راس ہوں نہیں

راس ی م پر زاویہ قائمہ بنتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ = ۲(۱ + ۲ + ۳)$$

$$(۱۶) \text{ ثابت کرو کہ منحنی } \left| \frac{۱-۱}{۱+۱} \right| = \text{مستقل اور دیں } \left(\frac{۱-۱}{۱+۱} \right) = \text{مستقل}$$

علی القیام دائرے ہیں۔

$$(۱۷) \text{ ثابت کرو کہ } ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ = ۲ \{ ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ \} \text{ اور}$$

اس مساوات کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(۱۸) ثابت کرو کہ دو مثلث جن کے راس بالترتیب ۱، ۲، ۳ اور ۱، ۲، ۳

بم، بام، بسم ہیں راست متشابہ ہیں۔

$$\text{اگر } \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(۱۹) اس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ ہوں یہ ہے کہ

$$\frac{(۱۱-۲)(۱۱-۳)(۱۱-۴)}{(۱۱-۲)(۱۱-۳)(۱۱-۴)} = \text{حقیقی ہو۔}$$

(۲۰) اگر (۱-۱)، (۱-۲)، (۱-۳)، (۱-۴)، (۱-۵)، (۱-۶)، (۱-۷)، (۱-۸)، (۱-۹)، (۱-۱۰)، (۱-۱۱)، (۱-۱۲)، (۱-۱۳)، (۱-۱۴)، (۱-۱۵)، (۱-۱۶)، (۱-۱۷)، (۱-۱۸)، (۱-۱۹)، (۱-۲۰)

تو ثابت کرو کہ وہ مثلث جن کے راس ۱، ۲، ۳ اور ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ مساوی الاضلاع مثلث ہیں۔



ڈی ماٹرے (De Moivre) کا مسئلہ

۷۔ ڈی مائٹے کا مسئلہ

فرض کرو کہ طہم اور طہم کوئی دوزاویچے ہیں تب

(جم لم + خ مب لم) (جم لم + خ يب لم) - جم لم + جم لم - جب لم + مب لم

+ خ (جیب طم حجم طم + حجم طم جیب طم)

— جم (طه + طه) + خیب (طه + طه)

اسی طرح کے تیسرے جزو ضروری سے ضرب دینے سے

(جزم طم + خ جب طم) (جزم طم + خ جب طم) (جزم طم + خ جب طم)

$$= [\text{جم}(\text{طه} + \text{طه}) + \text{خ جب}(\text{طه} + \text{طه})] [\text{جم}(\text{طه} + \text{طه}) + \text{خ جب}(\text{طه} + \text{طه})]$$

$$= \text{جم}(\text{طه} + \text{طه} + \text{طه}) + \text{خ جب}(\text{طه} + \text{طه} + \text{طه})$$

اسی طرح کا عمل ان اجزائے ضربی کے لیے کرنے سے

(جم طم + خ جب طم) (جم طم + خ جب طم) (جم طم + خ جب طم) (جم طم + خ جب طم)

$$= \text{مجموع (طه + طه + ... + طه)} + \text{مجموع (طه + طه + ... + طه)}$$

اگر ہم رکھیں طہ = طہ = طہ = = طہ = طہ تو نتیجہ ہو جاتا ہے

(جم لمه + خ جب طه) = جم ن لمه + خ جب ن طه، جہاں ن ایک

ثبوت صحیح عدد ہے -

ہم اب بتائینگے کہ یہ نتیجہ کسی منطق عددن کے لیے درست ہے چاہے ن
ثبوت ہو یا منفی -

فرض کرو کہ عہ ایسا عدد ہے کہ

$$(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) = \frac{\text{ن}}{\text{ق}} = \text{جم مہ} + \text{خ جب مہ} \text{ جہاں ف اور ق}$$

ثبوت صحیح اعداد ہیں

$$\text{تب } (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) = (\text{جم مہ} + \text{خ جب مہ})$$

یعنی $\text{جم} (\text{ف طہ}) + \text{خ جب} (\text{ف طہ}) = \text{جم} (\text{ق مہ}) + \text{خ جب} (\text{ق مہ})$
حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہمارا ابتدائی

مفروضہ صحیح ہے اگر $\text{عہ} = \frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}$ - عہ کی یہ صرف ایک ہی ممکنہ قیمت نہیں
ہے اور قیمتیں بھی ہو سکتی ہیں جن کو ہم آگے بتائینگے -

اس لیے $(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})$ کی ایک قیمت

$$(\text{جم} \frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ}}{\text{ق}}) \text{ ہے -}$$

اب فرض کرو کہ م ایک منفی صحیح عدد یا کسر ہے -

$$\text{چونکہ } (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) = (\text{جم مہ} + \text{خ جب مہ}) = \text{جم}^{\text{ا}} \text{طہ} + \text{جب}^{\text{ا}} \text{طہ} =$$

$$\text{اس لیے } (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) = (\text{جم مہ} + \text{خ جب مہ})$$

$$= [\text{جم} (-\text{طہ}) + \text{خ جب} (-\text{طہ})] =$$

$$= \text{جم م طہ} + \text{خ جب م طہ}$$

ادب کے نتائج سے چونکہ $(-م)$ ثبوت ہے -

اب ہم ڈی مائرے کے مسئلہ کو اس کی عام شکل میں بیان کرتے ہیں

ن کی بر منطوق قیمت [ثبت منفی صحیح یا کمزور] کے لیے
(جم ط + خ جب ط) ن کی قیمت یا اس کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت
(جم ن ط + خ جب ن ط) ہے۔

نوٹ:- اگر ن غیر منطوق ہو تو یہی ڈی ان کے مسئلہ صحت ہے۔

۸۔ ڈی ماثر کے مسئلہ سے نتائج

فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تب

$$(جم ۲ ن ط + خ جب ۲ ن ط) = (جم ط + خ جب ط) ن$$

$$= (جم ط) ن + ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۱ خ جب ط + ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۲ خ جب ط, \dots + (خ جب ط) ن$$

حقیقی اور خیالی مقول کو مساوی رکھنے سے

$$جم ۲ ن ط = (جم ط) ن - ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۱ خ جب ط, (جم ط) ن - ۲ خ جب ط$$

$$+ ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۳ خ جب ط, \dots + (خ جب ط) ن$$

$$\text{اور جب } ۲ ن ط = ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۱ خ جب ط - ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۲ خ جب ط$$

$$+ ۲ ن ط, (جم ط) ن - ۳ خ جب ط, \dots + (۱ - ۲ ن ط) (جم ط) ن - ۱ خ جب ط$$

اسی طرح سے

$$جم (۲ ن + ۱) ط + خ جب (۲ ن + ۱) ط = (جم ط + خ جب ط) (۲ ن + ۱)$$

$$= (جم ط) (۲ ن + ۱) + (۱ + ۲ ن ط) (جم ط) ن - ۱ خ جب ط$$

$$+ (۲ ن + ۱) (جم ط) ن - ۱ خ جب ط + (۱ + ۲ ن ط) (جم ط) ن - ۱ خ جب ط$$

اور اس لیے جم $(1+n^2)$ طہ = (جم طہ) $^{1+n^2}$ - $(1+n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ

$(1+n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ + ... + $(1-n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ

جب $(1+n^2)$ طہ = $(1+n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ - $(1+n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ +

$(1+n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ + ... + $(1-n^2)$ ج $^{1+n^2}$ (جم طہ) $^{1-n^2}$ جب طہ

تقسیم کرنے پر مس $2n$ طہ

$$\frac{2n \text{ ج ت} - 2n \text{ ج ت}^2 + \dots + (1-n^2) \text{ ج ت}^{1-n^2} - (1-n^2) \text{ ج ت}^{1-n^2}}{1 - 2n \text{ ج ت}^2 + \dots + (1-n^2) \text{ ج ت}^{1-n^2}}$$

جہاں ت = مس طہ

اور مس $(1+n^2)$ طہ

$(1+n^2)$ ج ت - $(1+n^2)$ ج ت^2 + ... + $(1-n^2)$ ج ت^{1-n^2} + $(1-n^2)$ ج ت^{1-n^2}

$1 - (1+n^2) \text{ ج ت}^2 + \dots + (1-n^2) \text{ ج ت}^{1-n^2} + (1-n^2) \text{ ج ت}^{1-n^2}$

۹۔ اکائی کے جذر — اب ہم ڈی مارے کے

مسئلہ کی مدد سے اکائی کے جذر معلوم کریں گے، جہاں ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

یعنی دوسرے الفاظ میں ہم مساوات $y^2 = x$ کو حل کریں گے جس کی واضح قیمتیں ہوتی ہیں

چونکہ جم = ۱ اور جب = ۰ =

اس لیے ۱ = جم + ۰ خ جب =

یعنی $\frac{1}{n} = [جم + ۰ خ جب] \cdot \frac{1}{n}$

$$[\text{جم} (۲ \text{ ک} + ۰) + \text{خ جب} (۲ \text{ ک} + ۰)] =$$

$$= \text{جم} \frac{۲ \text{ ک}}{ن} + \text{خ جب} \frac{۲ \text{ ک}}{ن}$$

ک کو بالترتیب ۱، ۲، ن - ۱ کے مساوی رکھنے سے
مطلوبہ قیمتیں حاصل ہونگی۔

$$(۰ \text{ جم} + ۰ \text{ خ جب}) = ۱$$

$$\left\{ \text{جم} \frac{۲}{ن} + \text{خ جب} \frac{۲}{ن} \right\}$$

$$\left\{ \text{جم} \frac{۲}{ن} + \text{خ جب} \frac{۲}{ن} \right\} \dots \dots \dots \left\{ \text{جم} \frac{۲}{ن} + \text{خ جب} \frac{۲}{ن} \right\}$$

ان ن اصولوں سے کوئی دو ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہیں کیونکہ کسی دو قیمتوں کے لیے جو طے کی قیمت حاصل ہوتی ہے ان کا فرق $\frac{۲}{ن}$ سے کم ہے۔ اس لیے اوپر کی قیمتیں اکائی کے ن جذروں کی ن وضع قیمتیں ہیں۔

آرگنڈ کی شکل میں اکائی کے ن جذروں کو دائرہ $|ای| = ۱$ کے اندر ایک ن ضلع والے منتظم کثیر الاضلاع کے کونوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ اس کثیر الاضلاع کا ایک راس حقیقی محور کے مثبت حصے پر ہے۔

اگر ن جفت ہو تو اس کے دو جذر حقیقی ہیں مثلاً (۱) اور (-۱) جس کو ک = ۰ اور $\frac{۲}{ن}$ کے بالترتیب مساوی رکھنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ بقیہ (ن - ۲) اعلیٰ ملطف ہیں۔ اگر ن طاق ہو تو اس کی صرف ایک اصل حقیقی ہے اور وہ (۱) ہے۔

$$\text{اگر ہم } = \text{جم} \left(\frac{۲}{ن} \right) + \text{خ جب} \left(\frac{۲}{ن} \right) \text{ لکھیں تو ہم جذروں کو}$$

۱، ۲، ۳، ۱ - لکھ سکتے ہیں۔ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اکائی کے ن جذر ایک ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک

سہ = ہے۔ ان کا مجموعہ ہے۔ $\frac{1 - سہ}{1 - سہ}$ ، اور یہ = صفر کیونکہ سہ = ۱

[یہی نتیجہ اس سے بھی حاصل ہوتا ہے کہ مساوات ی = ۱ - صفر میں ی = ۱ والی رقم نہیں ہے اس لیے اس کی اصلوں کا مجموعہ صفر ہے] اگر اکائی کی بجائے کوئی ملف مقدار ہو اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو ی = ۱ کی بھی ن واضح قیمتیں ہوں گی۔

کیونکہ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو تو

$$(\text{جم} \frac{\text{طہ} + ۲ک}{ن} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ} + ۲ک}{ن})$$

$$= \text{جم} (\text{طہ} + ۲ک) + \text{خ جب} (\text{طہ} + ۲ک)$$

$$= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ سہ (جم $\frac{\text{طہ} + ۲ک}{ن} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ} + ۲ک}{ن}$)

ن واں بند ہے (۱)

سا (جم طہ + خ جب طہ) کا یعنی ی کا

اگر ک کی بجائے سلسلہ وار اعداد صفر، ۱، ۲، ۳، (ن - ۱)

درج کیے جائیں تو ی = ۱ کی ن واضح قیمتیں حاصل ہوں گی۔ ک کی بجائے

دوسرے صحیح اعداد ن، (ن + ۱)، درج کرنے سے کوئی تئی

$$\text{قیمت حاصل نہیں ہوتی مثلاً اگر (جم} \frac{\text{طہ} + ۲ک}{ن} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ} + ۲ک}{ن})$$

میں ک = ن درج کیا جائے تو حاصل ہوگا (جم $\frac{\text{طہ} + ۲ن}{ن} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ} + ۲ن}{ن}$)

$$= \text{جم} (\frac{\text{طہ}}{ن} + ۲) + \text{خ جب} (\frac{\text{طہ}}{ن} + ۲) = \text{جم} \frac{\text{طہ}}{ن} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ}}{ن} \dots (۲)$$

اور اگر (ن + ۱) درج کیا جائے تو حاصل ہوگا۔

$$\left\{ \frac{\pi(1+n)^2 + \text{طہ}}{n} \right\} \text{جم} + \left\{ \frac{\pi(1+n)^2 + \text{طہ}}{n} \right\} \text{خ جب} = \left\{ \pi^2 + \frac{\pi^2 + \text{طہ}}{n} \right\} \text{جم} + \left\{ \pi^2 + \frac{\pi^2 + \text{طہ}}{n} \right\} \text{خ جب}$$

$$\text{جم} \left(\frac{\pi^2 + \text{طہ}}{n} \right) + \text{خ جب} \left(\frac{\pi^2 + \text{طہ}}{n} \right) \dots \dots \dots (\text{بیا})$$

قیمتیں ۱ اور ب وہی ہیں جو مساوات (۱) میں ک کی بجائے صفر اور ا درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۱:- (۱) کے جذرا الکعب معلوم کرو۔

چونکہ جم = ۰ اور جب = ۰ = ۰

$$\text{اس لیے (۱)}^{\frac{1}{3}} = [\text{جم} + ۰ \text{خ جب}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [\pi n^2 \text{خ جب} + \pi n^2 \text{جم}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \text{جم} \frac{\pi n^2}{3} + \text{خ جب} \frac{\pi n^2}{3}$$

ن کو بالترتیب صفر، ۱، ۲ کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہوں گی۔

$$\text{جم} = ۰ + \text{خ جب} = ۱$$

$$\text{جم} \frac{\pi^2}{3} + \text{خ جب} \frac{\pi^2}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{\pi^2 \text{خ}}{2}$$

$$\text{جم} \frac{\pi^2}{3} + \text{خ جب} \frac{\pi^2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{\pi^2 \text{خ}}{2}$$

مثال ۲:- (۱) کے جذرا الکعب معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ جم} = \pi = -۱ \text{ اور جب} = \pi = \text{صفر}$$

$$\text{اس لیے } (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} [\pi \text{ جب } + \pi \text{ جم}] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ (\pi + \pi \text{ ن } 2) \text{ جب } + (\pi + \pi \text{ ن } 2) \text{ جم} \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\pi + \pi \text{ ن } 2}{2} \text{ جب } + \frac{\pi + \pi \text{ ن } 2}{2} \text{ جم} \right\} =$$

$$= \frac{\pi (1 + \text{ن } 2)}{2} \text{ جب } + \frac{\pi (1 + \text{ن } 2)}{2} \text{ جم} =$$

ن کو بالترتیب صفر، ۱، ۲ کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہونگی۔

$$\frac{3\pi \text{ خ} + 1}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ جب } + \frac{\pi}{2} \text{ جم}$$

$$\text{جم} + \text{خ جب } \pi = 1 -$$

$$\frac{3\pi \text{ خ} - 1}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ جب } + \frac{\pi}{2} \text{ جم}$$

مثال ۳۔ (خ) کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ جم} = \frac{\pi}{2} = \text{صفر اور جب} = \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{اس لیے خ} = \text{جم} + \text{خ جب} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$(\text{خ}) = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} \text{ جب } + \frac{\pi}{2} \text{ جم}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ (\frac{\pi}{2} + \pi \text{ ن } 2) \text{ جب } + (\frac{\pi}{2} + \pi \text{ ن } 2) \text{ جم} \right\} =$$

$$= \text{جم} + \frac{\pi (\frac{1}{2} + \text{ن } 2)}{2} \text{ جب } + \frac{\pi (\frac{1}{2} + \text{ن } 2)}{2} =$$

$$= \text{جم} + \frac{\pi (1 + \text{ن } 2)}{2} \text{ جب } + \frac{\pi (1 + \text{ن } 2)}{2} =$$

$$\frac{\pi(1+n^2)}{10} \text{ جب } + \frac{\pi(1+n^2)}{10} \text{ جم} = \frac{1}{5} (خ)$$

اب 'ن' کو سلسلہ وار منفرد ۱، ۲، ۳ اور ۴ قیمتیں دینے سے (خ) $\frac{1}{5}$ کی مطلوبہ پانچ قیمتیں حاصل ہونگی۔

$$(۱) \frac{\pi}{10} \text{ جب } + \frac{\pi}{10} \text{ جم}$$

$$(۲) \frac{\pi}{10} \text{ جب } + \frac{\pi}{10} \text{ جم} = \frac{\pi}{5} (خ)$$

$$(۳) \frac{\pi}{10} \text{ جب } + \frac{\pi}{10} \text{ جم}$$

$$(۴) \frac{\pi}{10} \text{ جب } + \frac{\pi}{10} \text{ جم}$$

$$(۵) \frac{\pi}{10} \text{ جب } + \frac{\pi}{10} \text{ جم}$$

مثال ۴-۱۔ $(1 + 32خ)$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ۱ = جم طہ

اور ۳۲ = جب طہ

تب ۳۲ = ۱ + ۳۱ = ۲ +

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{32} = \text{جم طہ} \\ \frac{32}{32} = \text{جب طہ} \end{array} \right. \text{ اس لیے طہ} = \frac{\pi}{32}$$

$$\text{اس لیے } 1 + 32خ = ۲ + (\text{جم } \frac{\pi}{32} + \text{جب } \frac{\pi}{32})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 32خ \\ ۲ + (\text{جم } \frac{\pi}{32} + \text{جب } \frac{\pi}{32}) \end{array} \right\} = \frac{1}{32} (1 + 32خ)$$

$$\frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{\pi}{3} k^2 + \frac{\pi}{3} \right) \text{خ جب} + \left(\frac{\pi}{3} k^2 + \frac{\pi}{3} \right) \text{جم} \right\} \frac{1}{3} =$$

$$\left\{ \frac{\pi k^2 + \frac{\pi}{3}}{3} \text{خ جب} + \frac{\pi k^2 + \frac{\pi}{3}}{3} \text{جم} \right\} \frac{1}{3} =$$

$$\left\{ \frac{\pi (k^2 + 1)}{12} \text{خ جب} + \frac{\pi (k^2 + 1)}{12} \text{جم} \right\} \frac{1}{3} =$$

$$\left\{ \frac{\pi (k^2 + 1)}{12} \text{خ جب} + \frac{\pi (k^2 + 1)}{12} \text{جم} \right\} \frac{1}{3} =$$

اب ک کی بجائے سلسلہ وار ۰، ۱، ۲ اور ۳ رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہوں گی۔

$$\left\{ \frac{\pi}{12} \text{خ جب} + \frac{\pi}{12} \text{جم} \right\} \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \frac{\pi 4}{12} \text{خ جب} + \frac{\pi 4}{12} \text{جم} \right\} \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \frac{\pi 13}{12} \text{خ جب} + \frac{\pi 13}{12} \text{جم} \right\} \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \frac{\pi 19}{12} \text{خ جب} + \frac{\pi 19}{12} \text{جم} \right\} \frac{1}{3}$$

مثال ۵۔ مساوات $لا + لا + لا + ۱ = صفر$ کو حل کرو۔

$$لا + لا + لا = (لا + ۱)(لا + ۱) = صفر$$

پہلے جزو ضربی سے $لا = -۱ = -[جم(۱ + ن۲) + خ جب(۱ + ن۲)]$

$$[جم(۱ + ن۲) + خ جب(۱ + ن۲)] = \frac{1}{3} (۱ - لا)$$

ن کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳ دینے سے جو اصلیں حاصل ہوں گی وہ حسب ذیل ہیں۔

$$\text{جم } \frac{\pi}{\pi} + \text{خ جب } \frac{\pi}{\pi}$$

$$\text{جم } \frac{\pi^2}{\pi} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{\pi}$$

$$\text{جم } \frac{\pi^5}{\pi} + \text{خ جب } \frac{\pi^5}{\pi}$$

$$\text{جم } \frac{\pi^4}{\pi} + \text{خ جب } \frac{\pi^4}{\pi}$$

دوسرے جزو ضربی سے 'لا' = - ایضاً = - (۱) جس کی قیمتیں مثال ۲ میں اوپر معلوم کی جا چکی ہیں۔ اس لیے اوپر کی مساوات کی، اصلیں ہیں۔

$$(1 -) \frac{1 \pm x}{2}, \frac{3 \pm x}{2}, \frac{5 \pm x}{2}, \frac{7 \pm x}{2}$$

مختلف مثلثی جملے ڈی مائرے کے مسئلہ کی مدد سے مختصر کیے جاسکتے ہیں۔
مثال ۶ - مختصر کرو۔

$$\begin{aligned} & (\text{جم } ۳ طہ + \text{خ جب } ۲ طہ) (\text{جم } طہ - \text{خ جب } طہ) \\ & (\text{جم } ۵ طہ + \text{خ جب } ۵ طہ) (\text{جم } ۲ طہ - \text{خ جب } ۲ طہ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{جم } ۳ طہ + \text{خ جب } ۲ طہ) = (\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ) \quad (\text{جم } ۵ طہ + \text{خ جب } ۵ طہ) = (\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ) \\ & (\text{جم } طہ - \text{خ جب } طہ) = (\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ) \quad (\text{جم } ۲ طہ - \text{خ جب } ۲ طہ) = (\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ) \end{aligned}$$

$$\text{اس لیے دیا ہوا جملہ} = \frac{(\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ) (\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ)}{(\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ) (\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ)}$$

$$= \frac{(\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ)}{(\text{جم } طہ + \text{خ جب } طہ)} =$$

$$= \text{جم } ۱۳ طہ - \text{خ جب } ۱۳ طہ$$

مثال ۷:- اگر ۲ جم طہ = ۱ + $\frac{1}{\alpha}$ تو ثابت کرو کہ ۲ جم ن طہ = $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$

فرض کرو کہ ۱ = (جم طہ + خ جب طہ)

$$\text{تب } \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})}$$

$$= \frac{(\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})}{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})} = (\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} \\ \frac{1}{\alpha} = \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{اب } \frac{1}{\alpha} = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) \\ \frac{1}{\alpha^2} = (\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}) \end{array}$$

$$\text{اسی لیے } ۱ + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = ۲ \text{ جم ن طہ}$$

مثال ۸:- ی کی وہ تمام قیمتیں معلوم کرو جو مساوات (ی + ۱) + ۱ = ۰

= صفر کو پورا کرتی ہیں اور دکھاؤ کہ ان کے نقاط تعبیر (Representative points) خیالی محور کے متوازی ایک خط پر واقع ہیں۔

$$(۱ + ی) + ۱ = ۰ \text{ صفر}$$

$$(۱ + ی) - ۱ = ۰$$

$$۱ = \frac{(۱ + ی)}{۱}$$

$$۱ = \left[\frac{(۱ + ی)}{۱} \right]$$

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{(۱ + ی)}{۱}$ ، اکائی کا پانچواں جذر ہے۔

$$\frac{(۱ + ی)}{۱} = \frac{1}{\alpha} = [\text{جم } ۲ \text{ ک } \alpha + \text{خ جب } ۲ \text{ ک } \alpha]$$

$$= \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} \text{ جب } \pi \text{ ک } ۲$$

$$- \frac{۱+۱}{۱} = \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} \text{ جب } \pi \text{ ک } ۲$$

$$- ۱ - \frac{۱}{۱} = \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} \text{ جب } \pi \text{ ک } ۲$$

$$- \frac{۱}{۱} = ۱ + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} \text{ جب } \pi \text{ ک } ۲$$

$$\text{اس لیے } ۱ = \frac{۱ - \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵}}{\pi \text{ ک } ۲}$$

$$= \frac{۱ - \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵}}{\pi \text{ ک } ۲} \text{ جہاں } \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} = \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} \text{ اور ک قیمتیں}$$

۱، ۲، ۳، ۴ اختیار کرتا ہے۔

$$۱ = \frac{۱ - (۱ + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵})}{\pi \text{ ک } ۲}$$

$$= \frac{۱ - (۲ + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵})}{\pi \text{ ک } ۲}$$

$$= \frac{۱ - [۲ + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵}]}{\pi \text{ ک } ۲}$$

$$= \frac{(۲ + \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵} - \frac{\pi \text{ ک } ۲}{۵})}{\pi \text{ ک } ۲}$$

$$= - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ ک } \pi \text{ ک } ۲$$

تمام اصولوں کے حقیقی حصے $(-\frac{1}{p})$ کے مساوی ہیں اور یہ نقاط خط $\frac{1}{p} = -$ پر واقع ہیں، جو خیالی محور کے متوازی ایک خط ہے۔

امثلہ نمبری (۲)

(۱) (-1) کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۲) $(+1)$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۳) $(\frac{1}{p})$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

(۴) $(\text{جم } \frac{\pi}{p} + \text{خ جب } \frac{\pi}{p})$ کی چار قیمتوں کا مسلسل حاصل ضرب معلوم کرو۔

(۵) مساوات لا^۱ - ۱ = صفر کو حل کرو اور بتاؤ کہ اس کی کونسی اعلیں مساوات

لا^۱ + لا^۱ = ۱ صفر کو پورا کرتی ہے۔

(۶) مساوات لا^۱ + ۱ = صفر کو حل کرو۔

(۷) $(\text{جم } \frac{\pi}{p} + \text{خ جب } \frac{\pi}{p})$ کو مختصر کرو اور جواب ایسی شکل میں حاصل

کرو جس میں مثلثی جملے شامل نہ ہوں۔

مختصر کرو۔

(۸) $(\text{جم } ۲\text{طہ} - \text{خ جب } ۲\text{طہ}) (\text{جم } ۳\text{طہ} + \text{خ جب } ۳\text{طہ})$

$(\text{جم } ۴\text{طہ} + \text{خ جب } ۴\text{طہ}) (\text{جم } ۵\text{طہ} - \text{خ جب } ۵\text{طہ})$

(۹) $(\text{جم } \frac{\pi}{p} - \text{خ جب } \frac{\pi}{p})$

$(\text{جم } \frac{\pi}{p} + \text{خ جب } \frac{\pi}{p})$

(۱۰) ثابت کرو کہ $(\text{جب لا} + \text{خ جم لا})$

$= \text{جم } (\frac{\pi}{p} - \text{لا}) + \text{خ جب } (\frac{\pi}{p} - \text{لا})$

(۱۱) اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱) ی^۲ - ی^۲ = (۱ - ی) (۱ + ی) (۱ + ی^۲ + ی^۴ + \dots + ی^{۲(n-1)})$$

$$\{ ی^۲ - ی^۲ = (۱ - ی) (۱ + ی) (۱ + ی^۲ + ی^۴ + \dots + ی^{۲(n-1)}) \}$$

$$(۲) ی^۲ - ی^۲ = (۱ - ی) (۱ + ی) (۱ + ی^۲ + ی^۴ + \dots + ی^{۲(n-1)})$$

$$= (۱ - ی) (۱ + ی) (۱ + ی^۲ + ی^۴ + \dots + ی^{۲(n-1)})$$

$$\{ ی^۲ - ی^۲ = (۱ - ی) (۱ + ی) (۱ + ی^۲ + ی^۴ + \dots + ی^{۲(n-1)}) \}$$

(۱۲) ثابت کرو کہ کسی حقیقی مقدار کے ن خیالی جذروں کو مزدوج جوڑوں میں تیب دیا جاسکتا ہے۔

(۱۳) شکل میں مساوات $۱ + ی = ۰$ صفر کی اصلیں بتاؤ۔

(۱۴) ثابت کرو کہ مساوات

$(۱ + ی) + (۱ + ی^۲) = ۰$ صفر کی ہر ایک اصل کا حقیقی حصہ $-\frac{1}{2}$ ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات $۱ + ی + ی^۲ + ی^۳ = ۰$ کی چار طائف اصلیں ہیں۔ جن

میں سے دو دوسرے رُبع میں ہیں اور دوسرے رُبع میں واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تمام اصلیں ایک دائرے پر واقع ہیں۔

باب سوّم

لامتناہی سلسلے قوتِ نیائی، لوکارتمی، دائرِ می و زائدی تفاعل

۱۔ ملحق ارقام کے سلسلے کا مطلق استدقاق۔

یہ فرض کر کے کہ طالب علم حقیقی سلسلوں کے ابتدائی نظریوں سے واقف ہے
اب ہم بعض ملحق ارقام کے سلسلوں پر بحث کریں گے۔ لامتناہی سلسلہ

ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + + ی_ن + پر غور کرو جہاں
ی_۱، ی_۲، وغیرہ ملحق مقادیر ہیں اور ی_ن = (لان + خ مان)
سلسلہ ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + + ی_ن +
کو مستدق کہتے ہیں اگر حقیقی رقموں کے سلسلے

لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + + لان +
اور ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + + مان + مستدق ہوں

فرض کرو کہ ان سلسلوں کی پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو ہم بالترتیب

حج، کان اور مان سے تعبیر کرتے ہیں۔

تب حج = کان + خ مان

پر غور کرو۔ اس کے مقیاسوں کا سلسلہ ہے۔

$$..... + \left(\frac{r_n}{n}\right) + + \frac{r_4}{4} + \frac{r_3}{3} + \frac{r_2}{2} + r_1$$

جہاں $r = |ای|$

مقیاسوں کے سلسلے کے اشتقاق کی جانچ کے لیے (D' Lember) کی نسبتی جانچ استعمال کرو۔

$$تب \frac{عن}{1-عن} = r \left(\frac{1-n}{n}\right) = r(1 - \frac{1}{n})$$

اور نہ $r \left(\frac{1}{n} - 1\right) \leftarrow r$

اس لیے اوپر کا سلسلہ مستحق ہے اگر $r > 1$ ، اور اس لیے ابتدائی سلسلہ مطلق مستحق ہے اگر $|ای| > 1$ ۔

۱۱۔ قوت نمائی سلسلہ

$$..... + \frac{r_n}{n} + + \frac{r_4}{4} + \frac{r_3}{3} + \frac{r_2}{2} + r_1$$

پر غور کرو۔ جہاں $r = (حم طہ + خ جب طہ)$

$$..... + \frac{r_n}{n} + + \frac{r_4}{4} + \frac{r_3}{3} + \frac{r_2}{2} + r_1$$

اور یہ r کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہے کیونکہ $\frac{عن}{1-عن} = \frac{r}{n}$ اور جو

مائل بہ صفر ہے جبکہ n مائل بہ لا قناہی ہو۔

اس لیے ابتدائی سلسلہ r کی تمام محدود قیمتوں کے لیے مستحق ہے۔

اب یہ معلوم ہے کہ اوپر کا سلسلہ، r کا پھیلاؤ ہے اگر r حقیقی ہو

جہاں r ، نیپری لوکارتم کی اساس ہے اور جس کی تعریف مساوات

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

سے کی جاتی ہے۔

ہم نو کی تعریف، جبکہ ی ملطف مقدار ہو، لاتناہی سلسلہ

$$نو = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

کرتے ہیں۔

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

اب نو کے لیے اسی طرح کا سلسلہ

$$نو \times نو = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$نو + نو = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ملطف مقداروں کے لیے بھی قوت نماؤں

کا اصول برقرار رہتا ہے۔

$$نو + نو = نو \times نو$$

۱۲۔ دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں۔

فرض کرو کہ ی = خ طہ، جہاں طہ حقیقی ہے۔ تب

$$نو + نو = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$= (1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots)$$

$$+ \text{خ (طہ)} - \frac{\frac{۳}{۳} \text{طہ}}{۳} + \frac{\frac{۵}{۵} \text{طہ}}{۵} - \frac{\frac{۷}{۷} \text{طہ}}{۷} + \dots$$

اب اس سلسلے کے حقیقی اور خیالی حصے جب طہ اور جم طہ کے میکلا رہن کے مسئلہ سے حاصل شدہ مشہور سلسلے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{خ طہ} = \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} \dots \dots \dots (۱)$$

اگر (طہ) کی علامت بدل دی جائے تو

$$\text{خ طہ} = \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ} \dots \dots \dots (۲)$$

اور ان دو نتائج کو جمع اور تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{جم طہ} = \frac{(\text{خ طہ} + \text{خ طہ})}{۲} \text{ اور جب طہ} = \frac{\text{خ طہ} - \text{خ طہ}}{۲}$$

اختصار کی خاطر عام طور پر سہولت دہ ہوتا ہے کہ (جم طہ + خ جب طہ) کی بجائے سرخ طہ لکھیں۔ قوت نماؤں کی شکل میں بیان کرنے سے ڈی مار کا مسئلہ ہو جاتا ہے۔

$$(\text{خ طہ}) = \text{خ ن طہ}$$

$$\text{مثال ۲: ثابت کرو کہ} \left[\frac{+1 - \text{خ ت}}{+1 + \text{خ ت}} \right] + \left[\frac{+1 + \text{خ ت}}{-1 - \text{خ ت}} \right] = ۲ \text{ جم طہ}$$

$$\text{جہاں ت} = \text{مس} \frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$\text{اب چونکہ} \left[\frac{+1 + \text{خ ت}}{-1 - \text{خ ت}} \right] = \frac{\text{جم} \frac{\text{طہ}}{۲} + \text{خ جب} \frac{\text{طہ}}{۲}}{\text{جم} \frac{\text{طہ}}{۲} - \text{خ جب} \frac{\text{طہ}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{خ طہ} + \text{خ طہ}}{\text{خ طہ} - \text{خ طہ}} = \frac{\text{خ طہ}}{\text{خ طہ}}$$

$$\text{اسی طرح سے} \left[\frac{-1 - \text{خ ت}}{+1 + \text{خ ت}} \right] = \text{خ طہ}$$

اس لیے $\frac{+1 \text{ خ ت}}{-1 \text{ خ ت}} + \frac{-1 \text{ خ ت}}{+1 \text{ خ ت}} = \frac{+1 \text{ خ ط}}{-1 \text{ خ ط}} + \frac{-1 \text{ خ ط}}{+1 \text{ خ ط}} = ۲ \text{ جم ط}$
 مثال ۳: ثابت کرو کہ

۳۲ جم ط جب ط = ۲ + جم ۲ ط - جم ۲ ط - جم ۶ ط
 فرض کرو کہ ی = ۱ خ ط

تب $\frac{۱}{ی} = ۱ خ ط$

اس لیے ی + $\frac{۱}{ی}$ = ۲ جم ط

اور ی - $\frac{۱}{ی}$ = ۲ خ جب ط

اس لیے ۳۲ جم ط جب ط = $\frac{۱}{۲} [۱۶ \text{ جم ط}] [۳ \text{ جب ط}]$

۳۲ جم ط جب ط = $\frac{۱}{۲} [۱ + ی] [۱ - ی]$

= $\frac{۱}{۲} [۱ - ی^۲]$

= $\frac{۱}{۲} [۱ - ی^۲]$

= $\frac{۱}{۲} [۱ + ی^۲ + ی^۲ - ی^۲ - ی^۲ - ی^۲]$

= $\frac{۱}{۲} [۱ - (۱ + ی^۲) - (۱ + ی^۲) - (۱ + ی^۲)]$

اب ی + $\frac{۱}{ی}$ = ۲ جم ط

اور ی - $\frac{۱}{ی}$ = ۲ خ جب ط

اس لیے ی + $\frac{۱}{ی}$ = ۲ جم ط
 اور ی - $\frac{۱}{ی}$ = ۲ خ جب ط

اس لیے اوپر کا جملہ

$$= - \text{جم } ۶ طہ - ۲ \text{ جم } ۴ طہ + \text{جم } ۲ طہ + ۲$$

۱۳۔ ملف عدد کے لوکارتم — اگر ی کوئی ملف عدد ہو

اور وہ مساوات ی = ϕ کو پورا کرے تو وہ کوئی کا اساس و پر لوکارتم کہتے ہیں۔ جیسا کہ اب بتایا جائیگا کہ اگر ی دیا ہوا ہو تو وہ کی بے شمار قیمتیں ہوتی ہیں اور اس لیے ملف عدد کے بے شمار لوکارتم ہوتے ہیں۔

فرض کر دو کہ ی = ϕ (جم طہ + خ جب طہ) جہاں ϕ کی کامقیاس اور طہ کی دلیل کی صدر قیمت ہے۔

$$\text{تب اگر } \phi = \epsilon + \chi + \omega \text{ تو}$$

$$\phi = (\text{جم طہ} + \chi \text{ جب طہ}) = \epsilon + \chi + \omega$$

$$= \omega \times \omega$$

$$= \omega [\text{جم } \omega + \chi \text{ جب } \omega]$$

$$\text{جہاں } \omega = \phi \text{ اور } \omega = \text{طہ} + ۲ \text{ ن } \pi$$

جہاں $\pi = ۰ = ۱ = ۲ = ۳ \dots$ وغیرہ

چونکہ ϵ حقیقی ہے اس لیے یہ مثبت عدد ϕ کا نیمیشن لوکارتم ہے جس کو ہم لوک ϕ سے تعبیر کریں گے اور یہ یگانہ ہے۔ لیکن ω کی بے شمار قیمتیں ہو سکتی ہیں جن میں کسی دو کا باہمی فرق $\pi ۲$ کا کوئی ضعف ہے۔ ϕ کے لوکارتم تب ہم کو مساوات

لوک $\phi = \text{لوک } \phi + \chi (\text{طہ} + ۲ \text{ ن } \pi)$ سے ملتے ہیں جہاں π صفر یا کوئی صحیح عدد ہے۔ $\pi = ۰$ صفر رکھنے سے جو قیمت حاصل ہوتی ہے اس کو ϕ کا صدر لوکارتم کہتے ہیں۔ اس کا خیالی حصہ ϕ کے دلیل کی

جہاں $n = \text{مفر} '1 \neq '2 \neq '3 \dots$

اس لیے اس تفاعل کی بے شمار قیمتیں ہیں جن میں سے ہر ایک حقیقی ہے

دائری اور زائیدی تفاعل — لطف عددی کے دائرہ

تفاعلوں کی تعریف ذیل کے رشتوں کی مدد سے کی جاتی ہے -

$$\begin{aligned} \text{جب ی} &= \frac{\text{وخی} - \text{قوخی}}{2} \\ \text{جم ی} &= \frac{\text{وخی} + \text{قوخی}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{مس ی} = \frac{\text{جب ی}}{\text{جم ی}} = \frac{1}{\text{م ی}}$$

$$\text{قم ی} = \frac{1}{\text{جب ی}}$$

$$\text{قط ی} = \frac{1}{\text{جم ی}}$$

$$\text{جہاں وخی} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x \text{ ی})^n}{n!}$$

اُن مساواتوں سے جو جم ی اور جب ی کی تعریف کرتے ہیں -

$$\text{جم ی} + \text{خ جب ی} = \text{وخی}$$

$$\text{جم ی} - \text{خ جب ی} = \text{قوخی}$$

$$\text{اس لیے (جم ی} + \text{خ جب ی) (جم ی} - \text{خ جب ی)} = \text{وخی} \times \text{قوخی} = \text{قو}$$

$$\text{یعنی جم ی} + \text{جب ی} = 1$$

حقیقی اعداد کی طرح اگر ϵ اور ω کوئی دو ملطف مقداریں ہوں تو
یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\text{جب } (\epsilon \neq \omega) = \text{جب } \epsilon \text{ جم } \omega \neq \text{جم } \epsilon \text{ جب } \omega$$

$$\text{جم } (\epsilon \neq \omega) = \text{جم } \epsilon \text{ جم } \omega \neq \text{جب } \epsilon \text{ جب } \omega$$

اسی طرح سے ہم زائدی تفاعلوں کی تعریف رشتوں

$$\text{جزی} = \frac{\omega - \omega}{2}$$

$$\text{جزی} = \frac{\omega + \omega}{2}$$

$$\text{مجزی} = \frac{\text{جزی}}{\text{جزی}} = \frac{1}{\text{مجزی}}$$

$$\text{قجزی} = \frac{1}{\text{جزی}}$$

$$\text{قطجزی} = \frac{1}{\text{مجزی}} \text{ سے کرتے ہیں۔}$$

ان تعریفوں سے ظاہر ہے کہ مجزی - جزی = 1
دائری تفاعلوں کی طرح زائدی تفاعلوں کے لیے بھی جمع کے ضابطے حاصل
کیے جاسکتے ہیں -

$$\text{جمز } (\epsilon \neq \omega) = \text{جمز } \epsilon \text{ جمز } \omega \neq \text{جزز } \epsilon \text{ جزز } \omega$$

$$\text{جزز } (\epsilon \neq \omega) = \text{جزز } \epsilon \text{ جزز } \omega \neq \text{جمز } \epsilon \text{ جمز } \omega$$

$$\text{مجزز } (\epsilon \neq \omega) = \frac{\text{مجزز } \epsilon \neq \text{مجزز } \omega}{1 \neq \text{مجزز } \omega}$$

ہر ایک صورت میں دونوں طرف اوپر کی علامتیں یا نیچے کی علامتیں
لی جائیں۔

اگر خالص خیالی ہو اور (خ) کے مساوی ہو جہاں ما حقیقی ہے تو

تعریف سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جب } x \text{ م} = \frac{ق^۱ - ق^۰}{x^۲} = x \text{ جز م}$$

$$\text{جم } x \text{ م} = \frac{ق^۱ + ق^۰}{۲} = \text{جز م}$$

$$\text{جز } x \text{ م} = \frac{ق^۱ - ق^۰}{۲} = x \text{ جب م}$$

$$\text{جم } x \text{ م} = \frac{ق^۱ + ق^۰}{۲} = \text{جم م}$$

اب ہم کسی ملطف مقدار می = (لا + خ م) کی جیب، جیب التمام، ماس، وغیرہ کو شکل (۱ + خ ب) میں بیان کر سکتے ہیں۔

مثال (۶) جب (لا + خ م) کو شکل (۱ + خ ب) میں تحویل کرو۔
جب (لا + خ م) = جب لا جم خ م + جم لا جب خ م

$$= \text{جب لا جز م} + \text{جم لا جبر م}$$

$$\text{جم (لا + خ م)} = \text{جم لا جم خ م} - \text{جب لا جب خ م}$$

$$= \text{جم لا جز م} - \text{خ جب لا جز م}$$

$$\text{مس (لا + خ م)} = \frac{\text{جب (لا + خ م)} \cdot ۲ \text{ جب (لا + خ م)} \cdot \text{جم (لا - خ م)}}{\text{جم (لا + خ م)} \cdot ۲ \text{ جم (لا + خ م)} \cdot \text{جم (لا - خ م)}}$$

$$\text{جب ۲ لا + جب ۲ خ م}$$

$$= \frac{\text{جم ۲ لا + جم ۲ خ م}}{\text{جب ۲ لا + جب ۲ خ م}}$$

$$= \frac{\text{جم ۲ لا + جب ۲ خ م}}{\text{جم ۲ لا + جب ۲ خ م}}$$

$$\text{جم ۲ لا + جب ۲ خ م}$$

یہ دیکھ لیا جائے کہ تمام دائری اور زائیدی تفاعلوں کو ہم نے ی کے قوتی سلسلے کے طور پر بیان کیا ہے جہاں قوتی سلسلوں کے سر حقیقی ہیں۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ف اس میں سے کوئی ایک تفاعل ہو اور

ف (لا + خ ما) = (ع + خ بی) - جہاں ع اور بی حقیقی ہیں، تو

ف (لا - خ ما) = (ع - خ بی)

جس سے |ف (لا + خ ما)|^۲ = |ع + خ بی|^۲ = ف (لا + خ ما) × ف (لا - خ ما)
اس اصول سے اس قسم کے تفاعلوں کے مقیاس آسانی سے معلوم ہوتے ہیں۔

مثال (۶) |ج (لا + خ ما)|^۲ = |ج (لا + خ ما) × ج (لا - خ ما)|

$$= \frac{1}{4} (جم ۲ خ ما - جم ۲ لا)$$

$$= \frac{1}{4} (جمز ۲ ما - جم ۲ لا)$$

$$= جمز ما - جم لا$$

اسی طرح سے |ج (لا + خ ما)|^۲ = |جم (لا + خ ما) × جم (لا - خ ما)|

$$= \frac{1}{4} (جم ۲ لا + جم ۲ خ ما)$$

$$= \frac{1}{4} (جم ۲ لا + جمز ۲ ما)$$

$$= جم لا + جمز ما$$

اور |مس (لا + خ ما)|^۲ = |جمز ۲ ما - جم ۲ لا|

$$جم ۲ لا + جمز ۲ ما$$

اس کے متناظر زائدی تفاعلوں کے لیے مماثل نتیجے طالب علم مشق کے

طور پر خود کرے۔

مثال ۸ مس^۱ |ع + خ بی| کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کر دے

فرض کرو کہ مس^۱ |ع + خ بی| = (لا + خ ما)

یعنی مس (لا + خ ما) = ع + خ بی

تب مس (لا - خ ما) = ع - خ بی

$$مس ۲ لا = مس \{ (لا + خ ما) + (لا - خ ما) \}$$

$$= \frac{مس ۲ (ع + خ بی) + مس ۲ (ع - خ بی)}{1 - (ع + خ بی) - 1 - (ع - خ بی)}$$

$$= \frac{مس ۲ (ع + خ بی + ع - خ بی)}{1 - ع - خ بی - 1 + ع + خ بی}$$

$$\text{نیز مس (۲ خ م)} = \text{مس } \{ (لا + خ م) - (لا - خ م) \}$$

$$\frac{۲ \text{ خ م}}{۲ + ۲ + ۱} = \frac{(ع + خ م) - (ع - خ م)}{(ع + خ م) + (ع - خ م)} =$$

$$\therefore \text{خ} = \frac{۱۲ - ۱۲}{۱۲ + ۱۲} \times \frac{۲ \text{ خ م}}{۲ + ۲ + ۱} \dots (۱)$$

$$\therefore \frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۲ + ۲ + ۲ + ۱}{۲ - ۲ + ۲ + ۱}$$

$$\therefore \frac{۱۲}{۱۲} = \frac{۲ + ۲(۱ + ۱)}{۲ + ۲(۱ - ۱)}$$

$$\therefore \frac{۱}{۴} = \frac{\left\{ \frac{۲ + ۲(۱ + ۱)}{۲ + ۲(۱ - ۱)} \right\} \text{ لوک}}$$

$$\text{نیز مساوات (۱) سے مسز ۱۲} = \frac{۲}{۲ + ۲ + ۱}$$

$$\text{اس لیے م} = \frac{۱}{۴} \text{ مسز ۱} = \frac{۲}{۲ + ۲ + ۱}$$

$$\text{پس مسز (ع + خ م)} = \text{ن} + \text{مسز (ع + خ م)}$$

$$= \text{ن} + \frac{۱}{۴} \text{ مسز ۱} + \frac{۲}{۲ + ۲ + ۱} \text{ خ م}$$

مثال (۹) لوک جب (لا + خ م) کے حقیقی اور خیالی حصے الگ کرو۔

لوک جب (لا + خ م) = لوک (جب لا جز م + خ جز لا جز م)

$$= \text{لوک} \left[\text{جب لا جزا} + \text{جم لا جزا} \right] \text{خ} (\pi ۲ + \text{مس}^1 \frac{\text{جم لا جزا}}{\text{جب لا جزا}})$$

$$= \frac{1}{4} \text{لوک} [(1 - \text{جم لا}) \text{جزا} + \text{جم لا} (1 - \text{جزا})] \text{خ} (\pi ۲ + \text{مس}^1 \frac{\text{جم لا مسزما}}{\text{جم لا مسزما}})$$

$$= \frac{1}{4} \text{لوک} [\text{جزا} - \text{جم لا}] + \text{خ} (\pi ۲ + \text{مس}^1 \frac{\text{جم لا مسزما}}{\text{جم لا مسزما}})$$

$$= \frac{1}{4} \text{لوک} \left[\frac{\text{جزا} + ۱}{۲} - \frac{\text{جم لا} + ۱}{۲} \right] \text{خ} (\pi ۲ + \text{مس}^1 \frac{\text{جم لا مسزما}}{\text{جم لا مسزما}})$$

$$= \frac{1}{4} \text{لوک} \left[\frac{\text{جزا} - ۱}{۲} - \frac{\text{جم لا} - ۱}{۲} \right] \text{خ} (\pi ۲ + \text{مس}^1 \frac{\text{جم لا مسزما}}{\text{جم لا مسزما}})$$

مثال (۱۰) اگر جب (و + خ ب) = (لا + خ م) تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{جزب}} + \frac{\text{ما}}{\text{جزب}} = ۱ \text{ اور } \frac{\text{لا}}{\text{جزب}} - \frac{\text{ما}}{\text{جزب}} = ۱$$

جب (و + خ ب) = جب لا جزب + خ جم لا جزب = لا + خ م

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

جب لا جزب = لا

جم لا جزب = م

$$(۱) \dots \dots \dots \frac{\text{لا}}{\text{جزب}} = ۱$$

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{\text{ما}}{\text{جزب}} = ۱$$

$$(۱) \text{ اور } (۲) \text{ کو مربع لے کر جمع کرنے سے } ۱ = \frac{\text{لا}}{\text{جزب}} + \frac{\text{ما}}{\text{جزب}}$$

$$(۳) \dots \dots \dots \frac{\text{لا}}{\text{جزب}} = ۱ \text{ نیز } \frac{\text{ما}}{\text{جزب}} = ۱$$

اور جہزب = $\frac{1}{\text{جم}}$ (۴)

(۳) اور (۴) کو مربع لے کر تفریق کرنے سے $1 = \frac{1}{\text{جم}^2} - \frac{1}{\text{جم}^2}$

مثال (۱۱) اگر جم (۱ + خ ب) جہز (۱ + خ ب) = ۱ جہاں 'ب' لاء حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ

مس و مسزب = مسزلا مس

جم (۱ + خ ب) جہز (۱ + خ ب) = جم (۱ + خ ب) جہز (۱ + خ ب) جہز (۱ + خ ب) = ۱

(جم و جہزب - خ جب و جہزب) (جمزلا جم + خ جبزلا جب) = ۱

اس کا خیالی حصہ صفر کے مساوی ہے۔ اور حقیقی حصہ ۱ کے مساوی ہے۔

اس لیے جم و جہزب جہزلا جم + جب و جہزب جہزلا جب = ۱ (۱)

اور جم و جہزب جہزلا جب = جب و جہزب جہزلا جم = صفر (۲)

(۲) سے جم و جہزب جہزلا جب = جب و جہزب جہزلا جم

جہزلا جب = جب و جہزب

جمزلا جم = جم و جہزب

مسزلا مس = مس و مسزب

مثال (۱۲) ثابت کرو کہ جب (۴) کی عام قیمت $\pi(\frac{1}{4} + 2)$

خ لو کہ (۱۵ + ۴) ہے جہاں م ایک صحیح عدد یا صفر ہے۔

اگر جب ی = ۴ تو جم ی = خ ۱۵

اور نو خ = جم ی + خ جب ی = (۴ + ۱۵) خ جس سے

حاصل ہوتا ہے۔

خ ی = لوک (۴ + ۱۵) خ

= لوک (۴ + ۱۵) + لوک خ

$$= \text{لوک} (۲ + ۱۵۱) + \pi \left(\frac{1}{4} + ۲\right) \text{خ}$$

$$\text{چونکہ } ۱ = (۱۵۱ - ۲)(۱۵۱ + ۲)$$

$$\text{اس لیے لوک} (۲ + ۱۵۱) = - \text{لوک} (۱۵۱ - ۲)$$

اور ہم نتیجہ کو شکل

$$۱ = \pi \left(\frac{1}{4} + ۲\right) \text{خ} = \text{لوک} (۲ + ۱۵۱) \text{ میں لکھ سکتے ہیں۔}$$

$$\text{مثال (۱۳) اگر لوک} [م (لا + خ م)] = ۶ - خ و، \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

مزر ۶ = جز ۲ ماقط ۲ لا اور مم و = جب ۲ لا قمر ۲ م ثابت کرو کہ اگر لا کی قیمت $-\frac{1}{4}\pi$ اور $\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان ہو تو و، اُسی ربح میں ہوتا ہے جس میں کہ دلیل (لا + خ م) ہے۔

$$\text{و} - ۶ - خ و = م (لا + خ م)$$

$$\text{اور } \text{و} + ۶ - خ و = م (لا - خ م)$$

$$\text{اس لیے } \text{و} + ۶ - خ و \times \text{و} - ۶ - خ و = \text{و} ۶$$

$$= \frac{\text{جم} (لا + خ م) \text{ جم} (لا - خ م)}{\text{جب} (لا + خ م) \text{ جب} (لا - خ م)}$$

$$= \frac{(\text{جم} ۲ لا + \text{جز} ۲ م)}{(\text{جز} ۲ م - \text{جم} ۲ لا)}$$

$$\text{اس لیے مزر ۶} = \frac{\text{و} ۶ + ۱}{\text{و} ۶ - ۱}$$

$$= \frac{\text{جز} ۲ م}{\text{جم} ۲ لا} = \text{جز} ۲ ماقط ۲ لا$$

$$\text{نیز } \text{و} ۶ - خ و = \text{و} ۶ - خ و \times \text{و} - ۶ - خ و$$

$$\begin{aligned} & \text{جم (لا - خ م)} \text{ جب (لا + خ م)} \\ & \text{جب (لا - خ م)} \text{ جم (لا + خ م)} \\ & \text{(جب ۲ لا + خ جب ۲ م)} \\ & \text{جب ۲ لا - خ جب ۲ م} \end{aligned}$$

$$\text{اور مم ۲ و = خ} \frac{[1 + \frac{2}{\text{خ}}]}{[1 - \frac{2}{\text{خ}}]} = \frac{\text{خ جب ۲ لا}}{\text{خ جب ۲ م}} = \text{جب ۲ لا قمر ۲ م}$$

اب ہمیں بتانا ہے کہ اگر لا، مثبت یا منفی مادہ زاویہ ہوتو زاویہ و، اور دلیل (لا + خ م) اُسی ربع میں ہیں۔

$$\text{اب و - خ و} = \frac{\text{جم (لا + خ م)} \text{ جب (لا - خ م)}}{\text{جب (لا + خ م)} \text{ جب (لا - خ م)}}$$

$$\text{جس سے نو [جم و - خ جب و] = } \frac{\text{جب ۲ لا - خ جب ۲ م}}{\text{جم ۲ م - جم ۲ لا}}$$

اب حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{جم ۲ م - جم ۲ لا}} = \text{نو جم و}$$

$$\text{اور نو جب و} = \frac{\text{جم ۲ م}}{\text{جم ۲ م - جم ۲ لا}}$$

اب نو مثبت ہے کیونکہ حقیقی ہے اور (جم ۲ م - جم ۲ لا) مثبت ہے کیونکہ جم ۲ م سے کم نہیں ہو سکتا اور جم ۲ لا سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔ پس جم و کی وہی علامت ہوگی جو جب ۲ لا کی ہے اور جب و کی وہی علامت ہے جو جم ۲ م کی ہے۔ اب چار صورتوں پر غور کرنا ہے

صورت اول :- اگر دلیل (لا + خ م) پہلے ربع میں واقع ہو تو لا اور م دونوں مثبت ہیں۔ جب ۲ لا مثبت ہے کیونکہ لا، معصرا اور ۳ کے درمیان ہے اور جم ۲ م مثبت ہے۔ اس لیے جب و اور جم و دونوں مثبت ہیں اور زاویہ و

پہلے ربع میں ہے -

صورت دوم :- اگر دلیل (لا + خ ما) دوسرے ربع میں ہو تو ۲ لا، صفر اور - ۳ کے درمیان ہے اور جب ۲ لا منفی ہے لیکن ما مثبت ہے اس لیے زاویہ و ایسا ہے جس کی جیب التمام منفی ہے لیکن جیب مثبت ہے اور اس لیے یہ زاویہ دوسرے ربع میں ہے -

صورت سوم :- جب دلیل (لا + خ ما) تیسرے ربع میں ہو تو ۲ لا، صفر اور - ۳ کے درمیان ہے اور جب ۲ لا منفی ہے نیز ما اور اس لیے جز ما منفی ہے - اس صورت میں جب و اور جم و دونوں منفی ہیں اس لیے و تیسرے ربع کا زاویہ ہے -

صورت چہارم :- اگر دلیل (لا + خ ما) چوتھے ربع میں ہو تو ۲ لا، صفر اور ۳ کے درمیان ہے - جب ۲ لا مثبت ہے لیکن جز ما منفی ہے - اس لیے جم و مثبت ہے اور جب و منفی ہے - یعنی و چوتھے ربع کے اندر ہے -

سلسلوں کو جمع کرنا

بہت سے مثلثی سلسلے $\text{و خ ط} = \text{جم ط} + \text{خ جب ط}$ کے استعمال سے جمع کیے جاسکتے ہیں -

مثال (۱۴) سلسلہ

۱ + ۲ جم ط + ۲ جم ط + ۳ جم ط + + کون رقموں تک جمع کرو -

فرض کرو کہ ج = ۱ + ۲ جم ط + ۲ جم ط + ۳ جم ط

+ + ۱ - ۲ جم (ن - ۱) ط +

اور ص = ۲ جم ط + ۲ جم ط + ۳ جم ط

+ + ۱ - ۲ جم (ن - ۱) ط +

$$\text{تب ج + خ ص} = ۱ + \text{س}^۱ (\text{جم ط} + \text{خ جب ط}) + \text{س}^۲ (\text{جم ط} + \text{خ جب ط}) + \dots + \text{س}^۳ (\text{جم ط} + \text{خ جب ط}) + \dots$$

$$\text{یعنی ج + خ ص} = ۱ + \text{س}^۱ \text{خو}^۱ + \text{س}^۲ \text{خو}^۲ + \text{س}^۳ \text{خو}^۳ + \dots + \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \dots$$

$$\text{یعنی ج + خ ص} = \frac{۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}}{۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱}$$

$$\text{ج + خ ص} = \frac{(۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}) (۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱)}{(۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}) (۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱)}$$

$$= \frac{۱ - \text{س}^{\text{ن}} (\text{خو}^{\text{ن}}) - \text{س}^{\text{ن}} (\text{خو}^{\text{ن}}) + \text{س}^{\text{ن}} (\text{خو}^{\text{ن}}) (۱ + \text{ن})}{[۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱ + \text{س}^۲ \text{خو}^۲]}$$

$$= \frac{[۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + [۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + [۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + \dots}{[۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱ + \text{س}^۲ \text{خو}^۲]}$$

$$= \frac{[۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + [۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + [۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + \dots}{[۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱ + \text{س}^۲ \text{خو}^۲]}$$

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{ج} = \frac{[۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}} + \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + [۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + [۱ - \text{س}^{\text{ن}} \text{خو}^{\text{ن}}] + \dots}{[۱ - \text{س}^۱ \text{خو}^۱ + \text{س}^۲ \text{خو}^۲]}$$

$$\text{اور ص} = \frac{[\text{سراجب ط} - \text{سراجب ن ط} + \text{سراجب ن}^{۱۰} + \text{سراجب (ن-۱) ط}]}{[۱ - ۲ \text{سراجم ط} + \text{سراجم}^۲]}$$

بالعموم جیب التمام والے سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرنے کے ضمن میں جیب والے قناطر سلسلے کا مجموعہ بھی حاصل ہوتا ہے۔

مثال (۱۵) لاقتناہی تک جمع کرو۔

$$\text{بب ط} - \frac{1}{3} \text{جب ۳ ط} + \frac{1}{5} \text{جب ۵ ط} + \dots$$

$$\text{فرض کرو کہ ج} = \text{جب ط} - \frac{1}{3} \text{جب ۳ ط} + \frac{1}{5} \text{جب ۵ ط} + \dots$$

$$\text{اور ص} = \text{جم ط} - \frac{1}{3} \text{جم ۳ ط} + \frac{1}{5} \text{جم ۵ ط} + \dots$$

$$\text{تب ص} * \text{خ ج} = (\text{جم ط} + \text{خ جب ط}) - \frac{1}{3} (\text{جم ۳ ط} + \text{خ جب ۳ ط})$$

$$+ \frac{1}{5} (\text{جم ۵ ط} + \text{خ جب ۵ ط}) + \dots$$

$$\text{ص} + \text{خ ج} = \text{خو ط} - \frac{\text{خو ۳ ط}}{3} + \frac{\text{خو ۵ ط}}{5} + \dots$$

$$\text{یعنی ص} + \text{خ ج} = \text{جب} [\text{خو ط}]$$

$$= \text{جب} [\text{جم ط} + \text{خ جب ط}]$$

$$= \text{جب} (\text{جم ط}) \text{جم} (\text{خ جب ط}) + \text{جم} (\text{جم ط}) \text{جب} (\text{خ جب ط})$$

$$= \text{جب} (\text{جم ط}) \text{جمز} (\text{جب ط}) + \text{خ جم} (\text{جم ط}) \text{جمز} (\text{جب ط})$$

اس لیے اس مساوات کے دونوں جانب خیالی حصے کو مساوی رکھتے سے

ج = جم (جم طہ) جبز (جب طہ)

مثال (۱۶) ثابث کرو کہ

جب طہ × جب طہ - ۱/۲ جب طہ جب طہ + ۱/۲ جب طہ جب طہ

+ = قم (۱ + مم طہ + نم طہ)

فرض کرو کہ ج = جم طہ × جب طہ - ۱/۲ جم طہ جب طہ + ۱/۲ جم طہ جب طہ +

اور ص = جب طہ × جب طہ - ۱/۲ جب طہ جب طہ + ۱/۲ جب طہ جب طہ +

تب ج + خ ص = جب طہ × فو - ۱/۲ جب طہ فو + ۱/۲ جب طہ فو

ج + خ ص = لوک [۱ + جب طہ فو]

= لوک [۱ + جب طہ (جم طہ + خ جب طہ)]

= لوک [۱ + جب طہ جم طہ + خ جب طہ]

ہم کو صرف خیالی حصے کی ضرورت ہے۔

خ ص = خ مست ۱ + جب طہ جم طہ

= خ قم ۱ + جب طہ + جم طہ + جب طہ جم طہ

= خ قم [۱ + مم طہ + نم طہ]

اس لیے دیا ہوا سلسلہ مادی ہے قم [۱ + مم طہ + جم طہ]

امثلہ نمبری (۳)

(۱) حسب ذیل اعداد کو شکل نما (جم طہ + خ جب طہ) میں لکھو۔

$$\frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)} \quad (1)$$

(۲) وا + غب
[مسلمه + خ]

(۲) ڈی بائو کے مسئلہ سے یا کسی طرح سے ثابت کر دے

$$\text{جُمْلَةُ} + \text{جَبَّ طه} = \left(\frac{1}{42}\right) [\text{جم ٨ طه} + \text{جم ٢ طه} + \text{جم ٢٥}]$$

(۳) ثابت کرد که $\frac{y + x}{2} = \frac{y + x + x + y}{2}$

(۴) اگر $s = (x + y)$ جب $(x + y)$ تو ثابت کرو کہ

مفرما بجز ۲۴ = مملاجب ۲۵ ط

(۵) اگر $m =$ مس مسزبہ، اور $n =$ مس مسزبہ تو ثابت کردہ کہ

مس (۱+۲) = جنز ۲ بہ قمر ۲۷

۶ م اُرس (۱ + خب) = لا + خ م، تو ثابت کرو کہ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(۱۰) اگر $x + y = 2$ اور $x - y = 2$ تو x اور y کی رقوم میں معلوم

لہذا یہ عواہر کی قیمتیں معلوم کرو جبکہ $لا = ما = ۱$

جواب = $\frac{\text{جزء ۶۲}}{\text{جزء ۶۲} + \text{مجموع ۱۲}}$

$$\frac{\text{ج ۲}}{\text{ج ۲ ع} + \text{ج ۲ و}} = 6$$

وحد $\frac{1}{4}$ (ان II - مس $\frac{1}{4}$) جہاں ن = صفر $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

$$6 = \frac{1}{m} \text{ کوک } 5$$

(۸) ثابت کرد که لوک [جنب (لا + خ ما) قم (لا - خ ما)] = ۲ خ مستر (مستدام م لا)

(۹) اگر جزم (۶ + خ و) = مس (۱ + خ ب) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جزم } ۲ + ۶ = ۲ = [\text{جزم } ۲ - \text{جم } ۲] \\ \text{جزم } ۲ + \text{جم } ۲$$

(۱۰) اگر مس (طہ + خ فہ) = جب (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جزم } ۲ + \text{جم } ۲ = \text{جم } ۲ + \text{جم } ۲$$

(۱۱) اگر لا + خ ب = ج مس (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } ۲ = \frac{\text{ج } ۲}{\text{ج } ۲ - \text{ب } ۲}$$

(۱۲) اگر جم (طہ + خ فہ) = صا (جم عہ + خ جب عہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{فہ } = \frac{1}{4} \text{ لوک } \frac{\text{جب (طہ - عہ)}}{\text{جب (طہ + عہ)}}$$

(۱۳) اگر مس (طہ + خ فہ) = جم عہ + خ جب عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\pi} \text{ اور فہ} = \frac{1}{2} \text{ لوک مس} \left| \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\pi} \right|$$

(۱۴) مس [جم طہ + خ جب طہ] کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو -

(۱۵) ثابت کرو کہ لوک $\left\{ \frac{\text{جم (لا - خ ما)}}{\text{جم (لا + خ ما)}} \right\} = ۲ \text{ خ مس (مس لا - ما)}$

(۱۶) لوک لوک جب (لا + خ ما) کی قیمت معلوم کرو -

ذیل کے سلسلوں کو لا فتا ہی تک جمع کرو -

$$(۱۶) \text{ جم طہ} - \frac{1}{4} \text{ جم } ۳ \text{ طہ} + \frac{1}{16} \text{ جم } ۵ \text{ طہ} \dots$$

$$(۱۸) ۱ - \text{جم } ۲ \text{ طہ} + \frac{\text{جم } ۲ \text{ طہ}}{۳} - \frac{\text{جم } ۶ \text{ طہ}}{۴} + \dots$$

$$(۱۹) \text{ جم طہ} + \frac{\text{قم طہ}}{۳} + \text{جم } ۲ \text{ طہ} + \frac{\text{قم } ۲ \text{ طہ}}{۳} + \text{جم } ۳ \text{ طہ} + \dots$$

$$(۲۰) \text{ اگر ج} = \text{جم } ۲ \text{ طہ} - \frac{1}{4} \text{ جم طہ } ۳ \text{ طہ} + \frac{1}{5} \text{ جم طہ } ۵ \text{ طہ} \dots$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ مس } ۲ \text{ ج} = ۲ \text{ جم } ۲ \text{ طہ}$$

باب چہارم

ملف متغیر کے تفاعل

۱۵۔ ملف متغیر — اگر لا اور ما حقیقی متغیر اعداد ہوں

تو ی = (لا + خ ما) کو ملف متغیر کہتے ہیں۔ نقطہ ن جو آرگینڈ کی شکل میں
ی کو تعبیر کرتا ہے، لا اور ما کے ساتھ اپنا مقام بدلتا ہے۔ اگر لا اور ما دونوں
(لا، با) سے (لا، ما) تک مسلسل طور پر بدلیں تو نقطہ ن، ی مستوی میں نقطہ (لا، با)
سے (لا، ما) تک ایک مسلسل منحنی منقسم کرتا ہے۔ اگر لا اور ما دونوں محدود
ہوں تو ی کو بھی محدود کہتے ہیں۔ اگر لا اور ما دونوں غیر محدود ہوں تو ی
کو بھی غیر محدود کہتے ہیں۔

۱۶۔ تغیر کا راستہ — حقیقی متغیر کے تفاعلوں کے

نظریہ میں متبوع متغیر لا صرف وہی قیمتیں اختیار کر سکتا ہے جو لا محور کے نقاط
کے متناظر ہوں۔ اس کے برخلاف ملف متغیر کے تفاعلوں کے نظریہ میں
متبوع متغیری ابتدائی اور آخری نقطوں کو ملانے والے کسی راستے پر کے
نقاط کی متناظر قیمتیں اختیار کر سکتا ہے۔

اگر ی کے طے شدہ راستے پر کوئی دو نقاط ن اور ن ہوں اور

ان آخر میں ن، پر منطبق ہوں تو ایسے راستے کو یا اس معنی کو بند معنی کہتے ہیں۔

۱۷۔ ایک قیمتی تفاعل — جیسا ایک ملف متغیر مقدار

۷ کسی دوسری ملف متغیر مقدار ی کے ساتھ اس طرح مربوط ہو کہ ی کی ایک قیمت کے جواب میں ۷ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہو تو ۷ کو ی کا وحید القیمت یا ایک قیمتی تفاعل کہتے ہیں۔ مثلاً ی کا ایک کثیر الارقام جملہ - یا دو کثیر الارقام جملوں کی نسبت ی کا قیمتی تفاعل ہے۔

کثیر قیمتی تفاعل — اگر ی کی ہر قیمت کے جواب میں ۷ کی متعدد قیمتیں حاصل ہوں، تو ۷ کو ی کا کثیر قیمتی تفاعل کہتے ہیں مثلاً 'ما می' ی کا دو قیمتی اور 'ما می' ن قیمتی تفاعل ہے۔

۱۸۔ انتہائیں — اگر (ی) ایک ایک قیمتی

تفاعل ہو ی کا اور اگر کسی دی ہوئی چھوٹی مثبت مقدار ۷ کے جواب میں جو کتنی ہی چھوٹی ہو ایک مثبت مقدار ۷ اس طرح وجود رکھتی ہو کہ

ا ف (ی) - ل | > ۷ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جب کہ
 > | ی - ی | > ۷ عا تو کہا جاتا ہے کہ ف (ی) انتہا ل کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ی مائل بہ ی ہوتا ہے۔

اختصار کی خاطر ہم لکھتے ہیں -

نہی = ف (ی) = ل

ی مائل بہ لا انتہا ی تفاعل کی انتہا: - اگر ایک

اختیاری مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک ایسا مثبت عدد ن معلوم ہو سکے کہ ا ف (ی)۔ ل | > صہ جبکہ ای | < ن تو کہا جاتا ہے کہ ف (ی) انتہال کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ی مائل بہ لانتہا ہی ہے اسکو لکھتے ہیں۔

نہی ا ف (ی) = ل

لائنتہا ہی انتہا میں — اگر کسی مثبت عدد ن کے جواب

میں جو کتنا ہی بڑا ہو ایک ایسا مثبت عدد عا وجود رکھے کہ ا ف (ی) | < ن جبکہ ای — ی | > عا تو کہا جاتا ہے کہ ف (ی) انتہا لانتہا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ی مائل بہ ی ہو۔

اگر انتہال ی کا تفاعل ل (ی) ہو اور ایک ایسا عا وجود رکھتا ہو کہ ایک دیے ہوئے خطہ کے اندر تمام نقطوں ی کے لیے ا ف (ی) — ل (ی) | > صہ جبکہ ای — ی | > عا، تو ف (ی) کو اس خطہ میں ل (ی) کی طرف یکساں طور پر مائل کہتے ہیں۔

۱۹۔ تسلسل — تفاعل ف (ی) کو ی پرسلسل کہتے ہیں۔

اگر ف (ی) کی ایک معین قیمت ہو اور اگر نہی ا ف (ی) = ف (ی) ی

تسلسل کی شرط کو حسب ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

اگر کسی صہ کے جواب میں ایک عا ایسا معلوم ہو سکے کہ

ا ف (ی) — ف (ی) | > صہ جبکہ ای — ی | > عا

تو ف (ی) کو ی پرسلسل کہتے ہیں۔

ایک تفاعل ایک خطہ میں تسلسل ہوتا ہے اگر وہ اس خطہ کے تمام نقطوں پر تسلسل ہو۔

یکساں تسلسل — ایک تفاعل ف (ی) کو ایک دیے ہوئے

خطہ میں یکساں طور پر مسلسل کہتے ہیں اگر کسی اختیاری صہ کے جواب میں ایک ایسا عام معلوم ہو سکے کہ اس خطہ کے اندر ہر نقطہ ی کے لیے
 $\Delta f = f(y) - f(x)$ صہ جبکہ ای - ی کے لیے
 یعنی اگر ف (ی) اس خطہ کے اندر ف (ی) کی طرف یکساں طور پر
 مائل ہو۔

مسئلہ۔ اگر ف (ی) ایک دیے ہوئے خطہ میں مسلسل ہو تو وہ اس خطہ میں یکساں مسلسل ہوگا۔ ثبوت کے لیے دیکھو [ملطف متغیر کے تفاعل از میاک رابرٹ. Macrobert]

۲۰۔ Differentiation تفریق — ملطف متغیر

ی کے تفاعل ف (ی) کے مشتق کی تعریف حقیقی متغیر کے مشتق کی تعریف کے بالکل مماثل طریقہ پر کی جاتی ہے۔
 فرض کرو کہ نقطہ ی کے قریب ایک متغیر نقطہ ی ہے۔

نیز فرض کرو کہ $\Delta y = y - x$ اور $\Delta f = f(y) - f(x)$
 تب اگر انتہا $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{df}{dy}$ نہ ہو۔

وجود رکھتی ہو تو اس انتہا کو نقطہ ی پر ف (ی) کا مشتق کہتے ہیں۔
 اُس صورت میں مشتق دو ملطف متغیروں Δf اور Δy کے انتہاؤں کی نسبت ہے۔

انتہاؤں کے نظریہ سے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{df}{dy}$ کی انتہائی قیمت ی کے ی کے قریب آنے کے راستے پر منحصر نہیں ہے۔ یعنی یہ مشتق $\frac{df}{dy}$ کے دلیل پر منحصر نہیں ہے۔

۲۱۔ تحلیلی تفاعل — اگر ی کا کوئی تفاعل ف (ی) '

کسی نقطہ (ی) پر ایک قیمتی مسلسل اور تفریق پذیر ہو تو ف (ی) کو نقطہ ی ایک تحلیلی تفاعل کہتے ہیں۔

اگر ف (ی) ایک خطہ کے اندر تمام نقاط پر تحلیلی ہو تو اس کو اس خطہ کے اندر تحلیلی کہتے ہیں۔

اب ہم اس کے لیے ضروری اور کافی شرائط معلوم کرتے ہیں کہ ی کا کوئی دیا ہوا تفاعل ف (ی) تحلیلی ہو۔

(۱) ضروری شرائط کہ ف (ی) تحلیلی ہو۔

فرض کرو کہ $ه = (ع + خ و)$ ی کا ایک تحلیلی تفاعل ہے جہاں ع، اور و (لا اور ما) کے تفاعل ہیں۔ تب تحلیلی تفاعل کی تعریف سے ضروری ہے کہ اس کا تفریق سر یکانہ طور پر وجود رکھتا ہو۔

یعنی $\frac{مف ه}{مف ی}$ کی انتہا یگانہ طور پر وجود رکھتی ہو جبکہ مف ی

کسی طور پر مائل نہ صفر ہو۔

فرض کرو کہ لا، ما، ی اور ه کے متناظر چھوٹے اضافے مف لا،

مف ما، مف ی اور مف ه ہیں۔

تب $مف ه = مف ع + خ مف و$

اور $مف ی = مف لا + خ مف ما$

یعنی $\frac{مف ه}{مف ی} = \frac{مف ع + خ مف و}{مف لا + خ مف ما}$

نہی $\frac{مف ه}{مف ی} = \frac{مف ع + خ مف و}{مف لا + خ مف ما}$ نہی

اب مف ی کو اس طرح بدلو کہ $مف ما = صفر$ یعنی ما کو مستقل سمجھو۔

$$\text{تب} \frac{\text{مف} \text{ع}}{\text{مف} \text{لا}} = \frac{\text{ع} (\text{لا} + \text{مف} \text{لا}) - \text{ع} (\text{لا} \text{ما})}{\text{مف} \text{لا}} + \frac{\text{خ} (\text{لا} + \text{مف} \text{لا}) - \text{و} (\text{لا} \text{ما})}{\text{مف} \text{ما}}$$

اب اس خارج قسمت کی انتہا کی ایک معین انتہا ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ 'ء' اور 'و' کے جزوی تفرقی سر بمحاط لا کے وجود رکھتے ہوں اور اُس صورت میں

$$\text{نہا} \frac{\text{مف} \text{ع}}{\text{مف} \text{لا}} = \frac{\text{جف} \text{ع}}{\text{جف} \text{لا}} + \frac{\text{خ}}{\text{جف} \text{لا}}$$

اب پھر لا کو مستقل سمجھ کر 'ی' کو بدلو تب ما بدل کر ما + مف ما ہو گا۔

$$\text{اس صورت میں} \frac{\text{مف} \text{ع}}{\text{مف} \text{لا}} = \frac{\text{ع} (\text{لا} + \text{ما} + \text{مف} \text{ما}) - \text{ع} (\text{لا} \text{ما})}{\text{خ} \text{مف} \text{ما}} + \frac{\text{خ} (\text{لا} + \text{ما} + \text{مف} \text{ما}) - \text{و} (\text{لا} \text{ما})}{\text{خ} \text{مف} \text{ما}}$$

$$= \frac{\text{ع} (\text{لا} + \text{ما} + \text{مف} \text{ما}) - \text{ع} (\text{لا} \text{ما})}{\text{خ} \text{مف} \text{ما}} + \frac{\text{و} (\text{لا} + \text{ما} + \text{مف} \text{ما}) - \text{و} (\text{لا} \text{ما})}{\text{مف} \text{ما}}$$

اور اس صورت میں خارج قسمت انتہا

$$\frac{\text{جف} \text{و}}{\text{جف} \text{ما}} - \frac{\text{خ}}{\text{جف} \text{ما}}$$

ہوگی بشرطیکہ 'ء' اور 'و' کے جزوی تفرقی سر بمحاط ما کے وجود رکھتے ہوں۔ اب خارج قسمت کی انتہا دونوں صورتوں میں مساوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ

$$\frac{\text{جف} \text{ع}}{\text{جف} \text{لا}} + \frac{\text{خ}}{\text{جف} \text{لا}} = \frac{\text{جف} \text{و}}{\text{جف} \text{ما}} - \frac{\text{خ}}{\text{جف} \text{ما}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جف} \text{ع}}{\text{جف} \text{لا}} = \frac{\text{جف} \text{و}}{\text{جف} \text{ما}} \\ \text{اور} \frac{\text{جف} \text{ع}}{\text{جف} \text{ما}} = \frac{\text{جف} \text{و}}{\text{جف} \text{لا}} \end{array} \right.$$

(۱)

ان مساواتوں کو کوشی۔ ریمان کی تفرقی مساواتیں کہتے ہیں۔

اس سے معلوم ہوا کہ $\text{ع} = (\text{ع} + \text{خ} + \text{و})$ کے تحلیل ہونے کے لیے ضروری

شرائط یہ ہیں کہ ع اور و کے جزوی تفرقی $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$

اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ وجود رکھتے ہوں اور یہ کوشی - ریمان مساواتوں کو پورا کرتے ہوں

یہ شرائط ضروری ہیں لیکن کافی نہیں ہیں -
کافی شرائط :- ی کے تفاعل $\text{ف} (\text{ی})$ کو تحلیل ہونے کے لیے کافی

شرائط یہ ہیں کہ $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ وجود رکھتے ہوں
کوشی - ریمان مساواتوں کو پورا کرتے ہوں اور

یہ تفرقی مسلسل ہوں

اب $\text{مف ع} = \text{ع} (\text{لا} + \text{مف ما} + \text{ما} + \text{مف ما}) - \text{ع} (\text{لا} + \text{ما})$
 $= \text{ع} (\text{لا} + \text{مف لا} + \text{ما} + \text{مف ما}) - \text{ع} (\text{لا} + \text{مف لا} + \text{ما}) + \text{ع} (\text{لا} + \text{مف لا} + \text{ما}) - \text{ع} (\text{لا} + \text{ما})$
 تب تفرقی احصا کے مسئلہ اوسط سے

$\text{مف ع} = \text{مف ما} \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} (\text{لا} + \text{مف لا} + \text{ما} + \text{مف ما})$

$+ \text{مف لا} \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} (\text{لا} + \text{مف لا} + \text{ما})$

جہاں $\text{طہ} > 1$ اور $\text{طہ} > 0$

اب چونکہ $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ مسلسل ہیں اس لیے ہم کہہ سکتے

ہیں -

$\text{مف ع} = \text{مف لا} \left\{ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} (\text{لا} + \text{ما}) + \text{صہ} \right\} + \text{مف ما} \left\{ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} (\text{لا} + \text{ما}) + \text{صہ} \right\}$

جہاں صہ اور صہ مائل بہ صفر جبکہ |مف ی| — صفر

اسی طرح سے مف و = مف لا $\left\{ \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \right\}$ (لا، ما) + عا

+ مف ما $\left\{ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \right\}$ (لا، ما) + عا

جہاں عا اور عا دونوں صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ |مف ی| — صفر

اس لیے مف صہ = مف ع + خ مف و

= مف لا $\left\{ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \right\}$ (لا، ما) + صہ + مف ما $\left\{ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \right\}$ (لا، ما) + صہ

+ خ مف لا $\left\{ \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \right\}$ (لا، ما) + عا + خ مف ما $\left\{ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \right\}$ (لا، ما) + عا

= مف لا $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{خ} \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \right)$ + مف ما $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \text{خ} \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \right)$

+ صہ مف لا + صہ مف ما

جہاں صہ اور صہ مائل بہ صفر جبکہ |مف ی| — صفر

اب کوئی ریمان مساواتوں کی مدد سے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$

اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = - \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$

اس لیے مف صہ = مف لا $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{خ} \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \right)$

+ مف ما $\left(- \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{خ} \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \right)$ + صہ مف لا + صہ مف ما

مف صہ = مف لا $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{خ} \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \right)$

+ خ مف ما $\left(\text{خ} \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \right)$ + صہ مف لا + صہ مف ما

$$\text{مف ص} = (\text{مف لا} + \text{خ مف ما}) \left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{خ}}{\text{جف لا}} \right)$$

$$+ \text{سہ مف لا} + \text{سہ مف ما}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{مف ص}}{\text{مف ی}} = \frac{\text{فر ص}}{\text{فر ی}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{خ}}{\text{جف ما}}$$

$$\text{چونکہ } \left| \frac{\text{سہ مف لا} + \text{سہ مف ما}}{\text{مف ی}} \right| \geq \left| \text{سہ} \right| + \left| \text{سہ} \right|$$

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ ف (ی) کو تجلیلی ہونے کے لیے کافی شرائط یہ ہیں کہ ع اور و کے جزوی تفرقی مسلسل ہوں۔
اس لیے اگر ص = ف (ی) تجلیلی تفاعل ہو تو

$$\left\{ \begin{aligned} \text{ف (ی)} &= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{خ}}{\text{جف ما}} \\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{خ}}{\text{جف ما}} &= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{خ}}{\text{جف ما}} &= \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{خ}}{\text{جف لا}} &= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \end{aligned} \right.$$

یعنی ف (ی) کی قیمت مندرجہ بالا شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھی جاسکتی ہے۔

اگر ص = ع + خ و، جہاں ع اور و، لا اور ما کے تفاعل ہوں تو چونکہ

$$\frac{1}{p} (\text{ی} + \text{و}) \text{ اور } \frac{1}{p} (\text{ی} - \text{و})$$

ع اور و کو دو متنوع متغیروں ی اور و کے تفاعل سمجھ سکتے ہیں۔
اگر ع اور و کے پہلے رتبہ کے جزوی تفرقی مسلسل ہوں تو اس

کے لیے شرط کہ $\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی}$ پر منحصر نہ ہو ہے

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{خ}{جف ی}$$

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{خ}{جف ی} + \frac{جف و}{جف ی} - \frac{جف و}{جف ی}$$

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{خ}{جف ی} + \frac{جف و}{جف ی} - \frac{جف و}{جف ی}$$

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{خ}{جف ی} + \frac{جف و}{جف ی} - \frac{جف و}{جف ی}$$

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} - \frac{جف و}{جف ی}$$

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{جف و}{جف ی}$$

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{جف و}{جف ی} ، اور \frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} - \frac{جف و}{جف ی}$$

مساواتیں ہیں۔ اس لیے تحلیلی تفاعلوں کی صورت میں لا اور ما صرف

اجتماع (لا + خ) کے طور پر واقع ہو سکتے ہیں مثلاً یہ ظاہر ہے کہ

جب (لا + خ) = جب (ی - ی) تحلیلی تفاعل نہیں ہو سکتا۔

کوشی - ریمان مساواتوں کو اگر قطبی محدودوں میں بیان کیا جائے تو

یہ ہو جاتی ہیں۔

$$\frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} + \frac{خ}{جف ی} ، اور \frac{جف و}{جف ی} = \frac{جف ع}{جف ی} - \frac{جف و}{جف ی}$$

اور اس صورت میں مشتق حسب ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \times \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{ط}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{ط}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

$$= \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{ط}}} \text{جم}^{\text{ط}} - (-) \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ط}}} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ط}}} \text{خ}^{\text{ط}} = \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{ط}}}$$

$$= (\text{جم}^{\text{ط}} - \text{خ}^{\text{ط}}) \frac{\text{جف}^{\text{ط}}}{\text{جف}^{\text{ط}}}$$

۲۲- مزدوج تفاعل — اگر (ع+خ و) = ف (لا+خ و)

جہاں ف (ی) ملف متغیری کا تحلیلی تفاعل ہے تو ع اور و کو جو دو حقیقی متغیروں لا اور ما کے تفاعل ہیں مزدوج تفاعل کہا جاتا ہے۔

ع اور و کے جزوی تفرقی سہ ذیل کی رشتوں سے مربوط ہیں۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \text{اور} \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} = - \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

اگر یہ فرض کیا جائے کہ دوسرے رتبہ کے جزوی تفرقی سہ وجود

رکتے ہوں اور رشتہ $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}}$ کو پورا کرتے ہیں تو جزوی تفرق سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} \text{اور} \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} = - \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} = \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$$

یعنی ع اور و دونوں دو ابعاد میں لاپلاس کی مساوات۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{لا}}} + \frac{\text{جف}^{\text{و}}}{\text{جف}^{\text{ما}}} = \text{صفر کو پورا کرتے ہیں۔}$$

یہ مساوات ہمیشہ ریاضیاتی لمبیعیات (Mathematical Physics) میں نمودار ہوتی ہے۔

یہی کسی تفاعل (F) کے حقیقی اور خیالی حصے الگ کرنے سے ہم کو لاپلاس کی مساوات کے دو حل حاصل ہوتے ہیں۔ ان حلوں کو موسیقی تفاعل کہتے ہیں۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ملتف متغیر کے تفاعلوں کا نظریہ، دو ابعاد میں ریاضیاتی بلعینیات کے سوالوں کو حل کرنے میں کافی اہمیت رکھتا ہے۔

تخلیلی تفاعل معلوم کرنا جبکہ اسکا حقیقی یا خیالی حصہ
دیا گیا ہو۔

اگر تفاعل ϵ یا δ دیا ہوا ہو تو اس کا متناظر تحلیل تفاعل δ و ϵ جو
 نہیں رکھتا جب تک کہ دیا ہوا تفاعل موسیقی نہ ہو۔ اگر یہ شرط پوری ہو یعنی
 ϵ یا δ لاپلاس کی مساوات کو پورا کریں تو تفاعل δ ، 'کوشی'۔ بیان مساواتوں
 کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر ϵ ، 'یک قیمتی' مسلسل تفاعل ہو جو لاپلاس
 کی مساوات کو پورا کرتا ہے۔

تو $\frac{\text{جف و ملا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و ملا}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف و ملا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و ملا}}{\text{جف لا}}$ ۔
مکمل تفرقہ ہے اور اس لیے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱) ثابت کرو کہ $\epsilon = \text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} - \text{لا}^2\text{ما}^3 + ۱$ ایک موسیقی

تفاعل ہے اور اس کا متناظر تحلیلی تفاعل معلوم کرو۔

تفاعل موسیقی ہے یعنی یہ ثابت کرنا ہے کہ ϵ لاپلاس کی مساوات

$$\text{جف}^2\text{لا}^2 + \text{جف}^2\text{ما}^2 = \text{صفر کو پورا کرتا ہے۔}$$

$$\epsilon = \text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} - \text{لا}^2\text{ما}^3 + ۱$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} = \text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} = \text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} = \text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} = \text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ما}^2}{\text{جف}^2\text{ما}^2} = (\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱) - (\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱) = \text{صفر}$$

یعنی ϵ لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے اس لیے یہ موسیقی تفاعل ہے۔

اب تحلیلی تفاعل $\epsilon = (\epsilon + \chi)$ معلوم کرنے کے لیے ہم کو و کی

قیمت چاہیے۔

$$\text{و} = \frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ما}^2}{\text{جف}^2\text{ما}^2} - \frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ما}^2}{\text{جف}^2\text{ما}^2} = \text{و}$$

$$\text{و} = - \frac{\text{جف}^2\text{لا}^2}{\text{جف}^2\text{لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ما}^2}{\text{جف}^2\text{ما}^2} = \text{و}$$

$$\text{و} = - (\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱) + (\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱) = \text{و}$$

$$\text{و} = (\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱) - (\text{لا}^3 - \text{لا}^2\text{ما}^3 + \text{لا}^2\text{ما}^2\text{س} + ۱) = \text{و}$$

مساوات (۶ لا ۶ + ۶ لا ۶) فرلا + (۳ لا ۳ - ۳ لا ۳ + ۶ لا ۶) فرما کو ٹھیک تفرقی مساوات

$$\begin{cases} ۶ + ۶ لا ۶ = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} \\ ۶ + ۶ لا ۶ = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} \end{cases} \text{ اور}$$

یعنی اوپر کی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے اور جس کا ہونا لازمی ہے۔
اس لیے مساوات

$$\text{فر} = (۶ لا ۶ + ۶ لا ۶) فرلا + (۳ لا ۳ - ۳ لا ۳ + ۶ لا ۶) فرما کا حل ہے۔$$

$$۰ = \frac{۳ لا ۳}{۴} + ۶ لا ۶ + ۶ لا ۶ - ۳ لا ۳ + \frac{۳ لا ۳}{۳} + ۶ لا ۶ + م$$

$$۰ = ۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ - م + م [۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ + م کو کاٹ دیا گیا]$$

ہے جو کہ ٹھیک تفرقی مساوات کو حل کرنے کا طریقہ ہے [

$$\text{اس لیے } ۰ = ۶ + ۰ = (۳ لا ۳ - ۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ + ۱) + (۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ - م + م)$$

$$= (۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ - ۳ لا ۳ - ۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ + ۱) + م + م$$

$$= (۳ لا ۳ + ۶ لا ۶ + ۱) + م + م$$

$$= ۳ ی + ۱ + م + م \text{ جہاں م ایک حقیقی مستقل ہے۔}$$

۲۳۔ اگر تحلیلی تفاعل کا حقیقی یا خیالی حصہ دیا ہوا

ہو تو تحلیلی تفاعل معلوم کریں (Milne-Thompson) کا طریقہ۔

$$\text{فرض کرو کہ } ف(ی) = ۶(لا' م) + ۰(لا' م)$$

$$\text{تب اگر } ۰ = (لا - ۰(لا' م))$$

$$\text{تو } لا = \frac{۰ + ی}{۲} \text{ اور } م = \frac{۰ - ی}{۲}$$

کیا جاتا ہے -

$$\text{ف (ی)} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{خ} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

$$= \text{سم (لا' ما)} + \text{خ سم (لا' ما)}$$

$$= \text{سم (ی' ۰)} + \text{خ سم (ی' ۰)}$$

$$\text{جہاں سم (لا' ما)} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \text{ اور سم (لا' ما)} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{تب ف (ی)} = [\text{سم (ی' ۰)} + \text{خ سم (ی' ۰)}] \text{ مری} + \text{ا}$$

جہاں ا اختیار می مستقل ہے -

$$\text{مثال (۲) فرض کرو کہ } ۲ = ۱۱۱۱۱۱$$

$$\text{تب } \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = ۱۱۱۱۱۱ - \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = ۱۱۱۱۱۱ - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = \text{صفر}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = \text{صفر}$$

یعنی ۱۱۱۱۱۱ = ۱۱۱۱۱۱، ایک موسیقی تفاعل ہے جو لا پلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے -

$$\text{اب ف (ی)} = [\text{فم (ی' ۰)} - \text{خ فم (ی' ۰)}] \text{ مری} + \text{ج}$$

$$\text{جہاں فم} = \text{ع} \text{ اور فم} = ۱۱۱۱۱۱$$

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = ۱۱۱۱۱۱ \text{ اس لیے فم (ی' ۰)} = \text{ع (ی' ۰)} = \text{صفر}$$

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = ۱۱۱۱۱۱ \text{ اس لیے فم (ی' ۰)} = \text{ع (ی' ۰)} = ۱۱۱۱۱۱$$

اس لیے ف (ی) = $(-۲ \text{ خ ی مری}) = - \text{خ (ی) + ۱}$ جہاں ۱

اختیاری حقیقی مستقل ہے۔

مثال (۳) فرض کرو کہ $و = وُلجَم$

تب $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = وُلجَم$ ، $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = وُلجَم$

$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = -$ ، $\frac{\text{وُلجَب ما}}{\text{جف ما}} = -$ ، $\frac{\text{وُلجَم ما}}{\text{جف ما}} = -$

اس لیے $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = وُلجَم ما - وُلجَم ما = صفر$

یعنی و ایک موسیقی تفاعل ہے۔

اب ف (ی) = $[\text{سم (ی) } ۰ + \text{خ سم (ی) } ۰] \text{ مری + ب}$

سم = و اور سم = و

$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = -$ ، $\frac{\text{وُلجَب ما}}{\text{جف ما}} = \text{اس لیے سم (ی) } ۰ = -$ ، $\frac{\text{وُلجَب (۰)}}{\text{جف ما}} = صفر$

$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = وُلجَم ما$ اس لیے سم (ی) = ۰ ، $\frac{\text{وُلجَم (۰)}}{\text{جف لا}} = وُلجَم$

اس لیے ف (ی) = $(\text{خ وُلجَم مری} + \text{ب} = \text{خ وُلجَم} + \text{ب جہاں ب}$

حقیقی مستقل ہے۔

۲۴- منحنی = مستقل اور = مستقل —

اگر $(۶ + \text{خ و}) = \text{ف (لا + خ ما)}$ ، جہاں ف (ی) ، ی کا ایک قیمتی تفاعل ہو، تو مزدوج تفاعل ۶، اور و بھی لا اور ما کے یک قیمتی تفاعل ہونے لگے۔

ی مستوی کے ایک دیے ہوئے نقطہ ی. (= لا + خ با) میں سے منحنیوں کے نظام ء = مستقل اور و = مستقل کا ایک اور صرف ایک منحنی گزرے گا۔ ان منحنیوں کی مساواتیں ہونگی۔

$$ء (لا، ما) = ء (لا، با) اور و (لا، ما) = و (لا، با)$$

مثلاً اگر $(ء + خ و) = (لا + خ ما)$ ، تو یہ منحنی قائم زائد لا۔ ما = لا۔ با۔ او لا ما = لا با۔ ہیں۔

منحنیوں کے ان دو نظاموں کو ہم بالترتیب منحنیوں کے ء۔ نظام اور و۔ نظام سے تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما)، منحنی ء = مستقل پر کے دو قریبی نقطوں کے محدود ہیں۔ تب

$$ء (لا + مف لا، ما + مف ما) - ء (لا، ما) = صفر$$

اس مساوات کو صرف پہلے رتبہ کی رقموں تک ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلائے سے

$$\frac{جف ء}{جف لا} ورا + \frac{جف ء}{جف ما} ورا = صفر$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی نقطہ (لا، ما) پر $\frac{ورا}{ورا}$ کی قیمت یعنی منحنی مسا

$$\text{نقطہ (لا، ما) پر ڈھال (Gradient) } = - \frac{\frac{جف ء}{جف لا}}{\frac{جف ء}{جف ما}} \text{ ہے۔}$$

اسی طرح سے (و۔ نظام) کے منحنی کا نقطہ (لا، ما) پر ڈھال = $-\frac{\frac{جف و}{جف لا}}{\frac{جف و}{جف ما}}$ ہے

اس لیے ان دونوں منحنیوں کا اُنکے نقطہ تقاطع (لا، ما) پر ڈھالوں

کا حاصل ضرب

$$\frac{\text{جف} \times \text{جف}}{\text{جف} \times \text{جف}} - \frac{\text{جف} \times \text{جف}}{\text{جف} \times \text{جف}} = \frac{\text{جف} \times \text{جف}}{\text{جف} \times \text{جف}} - \frac{\text{جف} \times \text{جف}}{\text{جف} \times \text{جف}}$$

[کوشی۔ ریمان مساواتوں سے]

$$1 =$$

اور ہم ایک اہم نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

نظام اور نظام کے منحنی باہم زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

مثال (۳) اگر $(ع + خ) = \frac{1}{ی}$ تو $ع$ ، و نظام معلوم کرو۔

$$\frac{ع - خ}{لا + ما} = \frac{ع - خ}{(لا + خ)(لا - خ)} = \frac{1}{لا + خ} = \frac{1}{ی}$$

$$\frac{لا}{لا + ما} = ع$$

$$\frac{ما}{لا + ما} = و$$

تب اگر $ع =$ مستقل منحنی کا نظام ہو تو

$$\frac{لا}{لا + ما} = ک \quad \text{یعنی } لا + ما = ۲ک \quad \text{ک لا، و نظام کے منحنی ہیں}$$

جہاں ک اختیاری مستقل ہے۔

$$\frac{ما}{لا + ما} = ک \quad \text{یعنی } لا + ما = ۲ک \quad \text{ک ما، و نظام کے منحنی ہیں}$$

جہاں ک اختیاری مستقل ہے۔

یہ بالترتیب محوروں و ما اور ولا کو مبدا، و پرس کرنے والے

دائروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ نظام کا ہر دائرہ، نظام کے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

مثال (۵) اگر $(e + x) =$ لوکی

تو $e =$ لوکی

اور $w =$ دلیل

اس لیے منحنی $e =$ مستقل، دائرے ہیں جن کے مرکز مبدا پر ہیں اور $w =$ مستقل مبدا میں سے نکلنے والے خطوط ہیں جو دائروں کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

۲۵۔ نادرنقطے — تفاعل $\frac{1}{(y-x)}$ ، اس خطہ کے اندر

تحلیلی ہے جس میں نقطہ $y =$ شامل نہیں ہے نقطہ $y =$ پر تفاعل کی قیمت محدود نہیں ہے۔ اس نقطہ کو نادرنقطہ کہتے ہیں۔ اور تفاعل کی اس نقطہ پر نادریت ہونا کہتے ہیں۔

اگر تفاعل $f(y)$ ، $y =$ پر محدود نہ ہو لیکن ایک ایسا n معلوم کیا جاسکے کہ $(y-x)$ ایک انتہا کی طرف مائل ہو، جو صفر کے ساوی نہیں ہے، تو کہا جاتا ہے کہ تفاعل $f(y)$ کا $y =$ پر n ویں رتبہ کا قطب ہے۔

تعریف کی بموجب $\frac{1}{(y-x)}$ کا $y =$ پر پہلے رتبہ کا قطب ہے یعنی

یہ سادہ قطب ہے۔

اگر نادرنقطہ کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے کہ اس کے اندر تفاعل کی کوئی نادریت نہ ہو تو اس نادریت کو جداگانہ نادریت کہتے ہیں۔

تفاعل $\frac{1}{z}$ کی $y = 0$ پر بغیر جداگانہ نادریت ہے کیونکہ

جب $(\frac{1}{z})$ صفر ہے جبکہ $y = 0$ جہاں کوئی صحیح عدد ہے اور

یہ ناممکن ہے کہ مبداء کو ایک ایسے دائرہ سے گھیرا جائے جس کے اندر یہ لائن واقع نہ ہو۔

اُس نقطہ کو جس کو ایک ایسے دائرہ کا مرکز بنایا جاسکے جس کے اندر کوئی نادریت نہیں ہے، سادہ نقطہ کہتے ہیں۔ اگر دائرہ کا نصف قطر اُس فاصلہ کے مساوی ہو جو مرکز اور قریب ترین نادریت کے درمیان ہے تو دائرہ کا اندرونی حصہ اُس نقطہ کا علاقہ (Domain) کہلاتا ہے۔

تفاعل $f(z)$ کو جس کے نادر نقطے مستوی کے محدود حصہ میں

صرف قطب ہوں تو اس کو جزوی طور پر تحلیل (Meromorphic) تفاعل

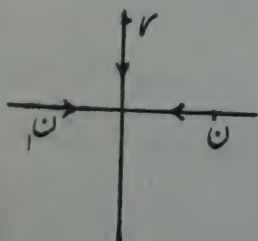
کہتے ہیں۔

خاص ندرتیں (Essential singularities)

اگر n کی ایسی کوئی قیمت معلوم نہ ہو سکے جسکے لیے $f(z)$ (ی۔ی۔) $f(z) = 0$ ج

تو $f(z)$ کی خاص نادریت کہتے ہیں۔

مثال (۶) تفاعل $\frac{1}{z}$ کی $y = 0$ صفر پر خاص نادریت ہے۔



تفاعل $\frac{1}{z}$ کسی خط کے اندر تحلیل ہے جس میں مبداء شامل نہیں ہے۔

اگر $\{ (8) \}$ سے کوئی حقیقی

قیمت تعبیر ہو، تو اس کے متناظر تفاعل کی قیمت

شکل (۸)

حقیقی ہوگی اور مثبت ہوگی۔ اب جیسے جیسے n ، لا محور پر حرکت کر کے مبداء کے قریب آتا جاتا ہے، تفاعل $\frac{1}{n}$ کی قیمت بے حد بڑھتی جاتی ہے۔ اگر n سے y کی منفی حقیقی قیمت تعبیر ہو، تو $\frac{1}{n}$ کی قیمت جیسے جیسے n ، لا محور پر حرکت کر کے مبداء کے قریب آتا ہے بڑھتی جاتی ہے اور منفی ہوتی ہے اور اس لیے $\frac{1}{n}$ ، صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اگر خیالی محور پر ہر نقطہ x ما ہو، تو اس کے متناظر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{n}$ ہے۔ ماکہ تمام حقیقی قیمتوں کے لیے اس کا مقیاس اکائی ہے۔ اس سے یہ صاف ظاہر ہے کہ $\frac{1}{n}$ کی کوئی معین انتہا نہیں ہے جبکہ y صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اور n کی ایسی کوئی قیمت نہیں معلوم کی جاسکتی جس کے لیے $y = \frac{1}{n}$ ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہو۔ یعنی $y = 0$ پر $\frac{1}{n}$ کی خاص نادیریت ہے۔

صفر نقطہ - اگر $f(y) = (y - y_0)^n$ (فہ (ی) جہان n ایک مثبت صحیح عدد ہے، اور فہ (ی) y_0 پر تحلیل ہے اور صفر نہیں ہے تو y_0 کو $f(y)$ کا n ویں رتبہ کا صفر نقطہ کہتے ہیں۔ پہلے رتبہ کا صفر نقطہ سادہ صفر نقطہ بھی کہلاتا ہے۔

۲۶۔ مقلوب تفاعل — اگر $f(y) = (y - y_0)^n$ تحلیل ہو

اس طرح کہ $m = m$ ، $y = y_0$ کے متناظر ہو، تو y_0 کو $f(y)$ کا تفاعل مانا جاسکتا ہے جس میں نقطہ y_0 ، نقطہ m کے متناظر ہے۔ اگر یہ تفاعل m مستوی اُس خط کے اندر جس میں m واقع ہے یک قیمتی اور مسلسل ہوں تو چونکہ $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$ ، یہ اُس خط کے اندر تمام نقاط کے لیے m کا تحلیل تفاعل ہے

مولے اُن نقطوں کے جس کے لیے $\frac{م}{م} = \text{صفر}$ اس تفاعل کو ف (ی) کا متغیر تفاعل کہتے ہیں۔

امثلہ نمبری (۴)

(۱) ثابت کرو کہ $\frac{1}{(1-1)(1-2)(1-3)}$ تحلیلی ہے سو اے ب ج پر

(۲) ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل تحلیلی ہیں اور اُن کے مشتق معلوم کرو۔

(۱) $(1-1)(1-2)(1-3)$ جواب $(1-1)(1-2)(1-3)$

(ب) $(1-1)(1-2)(1-3)$ جواب $(1-1)(1-2)(1-3)$

(ج) $(1-1)(1-2)(1-3)$ جواب $(1-1)(1-2)(1-3)$

(د) $(1-1)(1-2)(1-3)$ جواب $(1-1)(1-2)(1-3)$

{ اشارہ :- تحلیلی تفاعل ہیں یہ ثابت کرنے کے لیے دکھاؤ کہ ہر ایک تفاعل

کوئی - میان مساواتوں کو پورا کرتا ہے۔ پھر تفرقی سے معلوم کرنے کے لیے جو

چار ضابطے دیے گئے ہیں اُن میں سے کسی ایک کو استعمال کرو }

(۳) ثابت کرو کہ $(1-1)(1-2)(1-3)$ اور $(1-1)(1-2)(1-3)$ تحلیلی تفاعل نہیں ہیں۔

{ اشارہ :- ان تفاعلوں کو $(1-1)(1-2)(1-3)$ کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا }

(۴) ثابت کرو کہ لوک $(1-1)(1-2)(1-3)$ اور $(1-1)(1-2)(1-3)$ کے تحلیلی تفاعل ہیں۔

(۵) اگر ن حقیقی ہے تو ثابت کرو کہ $(1-1)(1-2)(1-3)$ تحلیلی ہے سو

صفر کے اور اس کا مشتق ہے $(1-1)(1-2)(1-3)$

(۶) ی کی کن قیمتوں کے لیے صفر کے حسب ذیل تفاعل تحلیلی نہیں ہیں۔

(۱) $(1-1)(1-2)(1-3)$ جواب $(1-1)(1-2)(1-3)$

(ب) $(1-1)(1-2)(1-3)$ جواب $(1-1)(1-2)(1-3)$

$$\frac{\text{لا}}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)} = ۶ (۵)$$

(۶) = جب لا جز ۲ + جم لا جز ۲ + لا - ما + ۲ لا ما
(۹) اگر ۶ اور ۲ مزدوج تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ حسب ذیل تفاعل بھی مزدوج ہیں۔

(۱) ۶ - ب و اور ۶ + ب و جہاں ۱ اور ۲ حقیقی مستقل ہیں۔

$$(ii) \frac{۶}{(۶^2 + ۲^2)} \text{ اور } \frac{۲}{(۶^2 + ۲^2)}$$

(۱۰) اگر (۶ + خ و) = لوک (ی - ۱) - لوک (ی + ۱) تو ثابت کرو کہ
منحني ۶ = مستقل اور ۲ = مستقل دو علی القوائم دائروں کے نظام ہیں۔
(۱۱) اگر ۱ = مس ۶، تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا (جم ۶۲ + جز ۲۲)} = \text{جب ۶۲}$$

$$\text{اور ما (جم ۶۲ + جز ۲۲)} = \text{جز ۲۲}$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر ۶ مستقل ہو اور ۲ بدلے تو، 'ی' آرگینڈ کی شکل میں، دائرہ لا + ما + ۲ لا مم ۶۲ = ۱، منقسم کرتا ہے۔

(۱۲) اگر ۱ = جب ۶ جز و + خ جم ۶ جز و، تو شکل میں علی القوائم نظام
۶ = مستقل اور ۲ = مستقل کو دکھاؤ۔ ثابت کرو کہ پہلا نظام ہم ماسک زائڈوں
اور دوسرا نظام ہم ماسک ناقصوں پر مشتمل ہے۔

(۱۳) ف (ی) معلوم کرو۔

$$\frac{\text{وا} - \text{جم لا} + \text{جب لا}}{\text{جز ما} - \text{جم لا}} = \text{اگر ۶ - و} = \frac{\text{وا} - \text{جم لا} + \text{جب لا}}{\text{جز ما} - \text{جم لا}}$$

$$\frac{\text{خ} - ۱}{۲} + \left(\frac{۶}{۲}\right) \text{مم}$$

(۱۴) ثابت کرو کہ قطبی، ممی، مسی اور ممی، مستوی کے محدود حصہ میں
جزوی طور پر تحلیلی تفاعل ہیں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ لا قنابہی $\frac{(ل ی + م ی + ن ی + ع)}{ل ی + م ی + ن ی + ع}$ کا سادہ صفر ہے۔

(۱۶) قطب، جداگانہ نادریت کا نقطہ ہے۔

(۱۷) کسی خطہ کے اندر لا قنابہی جداگانہ نادریتیں نہیں ہو سکتی۔

(۱۸) اگر $ج = مسز (π ۵۵)$ تو ثابت کرو کہ خطوط $۶ = ۶$ ، ہم محور دائروں

{ لا - ج ممز (۶ π ۲) } + $۲ = ۲$ ج قطر (۶ π ۲) کے متناظر ہیں۔

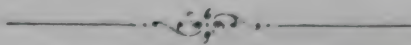
اور خطوط $و = و$ ، ہم محور دائروں کے علی القوام نظام ہیں۔

(۱۹) اگر $۶ = (لا - ۱) - ۳ لا ما + ۳ ما$ ، تو $و$ کی قیمت معلوم کرو اور اس سے $و$ کی قیمت معلوم کرو۔

جواب $و = ۳ ما (لا - ۱) - ۳ ما$ ، $۶ = (۱ - لا) - ۳$ ۔

(۲۰) اگر $۲ = ما (لا + ۱)$ ، تو اس کے متناظر $و$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۱) اگر $۶ = لا - ۲$ ، جم $۲ لا ما$ تو $و$ کی قیمت معلوم کرو۔



باب پنجم

مساواتوں کی اصلیں کثیر قیمتی تفاعلوں کی شاخیں اور
شاخ نقطے پیمان کی سطح
۲۷۔ مساواتوں کا نظریہ — اگر

ف (ی) = $a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n$ جہاں n مثبت صحیح عدد ہے، اور a_1, a_2, \dots, a_n حقیقی

یا ملطف اعداد ہیں جو y پر منحصر نہیں ہیں تو ف (ی) کو y کا کثیر الارقام جملہ اور مساوات ف (ی) = صفر کون ویں درجہ کی جبری مساوات کہتے ہیں۔
ی کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے مساوات کی اصل کہلاتی ہے یا y کی اس قیمت کو کثیر الارقام ف (ی) کا صفر کہتے ہیں۔ جبر و مقابلہ کے اساسی مسئلہ کی رو سے (جس کو یہاں ثابت نہیں کیا جائیگا) ہر ایسی مساوات کی کم سے کم ایک حقیقی یا ملطف اصل ہوتی ہے۔ اگر ہم اس مسئلہ کو تسلیم کریں تو یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ ہر n ویں درجہ کی مساوات کی n اور صرف n اصلیں ہوتی ہیں۔

یہ ضروری نہیں ہے کہ مساواتوں کی اصلیں عم، عم، عم، عن، ایک دوسرے سے مختلف ہوں اگر ان میں سے سب اصلیں عم کے مساوی ہوں اور بقیمہ عم سے مختلف ہوں تو

ف (ی) \equiv ل (ی - ع) ف (ی)

جہاں فد (ی) ' (ان - سر) درجہ کا کثیر المرقام جملہ ہے جو ی = عم
درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا۔ ی کے لحاظ سے تفرق کرنے سے اور تفرقی
مروں کو زبروں سے تعبیر کرنے سے

$$[ف(ی) \equiv (ی-ع)^{-1} + (ی-ع) + ف(ی)]$$

اب اس مساوات کے بائیں جانب کے بڑی قوس کے اندر کا جملہ
 ی = عم، درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا۔ اس سے حاصل ہوتا ہے
 ف (ی) کا ایک جزو ضربی (ی - عم) ہے۔ اس لیے اگر ف (ی) کی
 عم، سہا دفعہ تکرار پانے والی اصل ہو تو 'عم' ف (ی) کی (سہا - ۱) دفعہ
 تکرار پانے والی اصل ہوگی۔
 اگر ف (ی) = کی کوئی نہ تکرار پانے والی اصل عم ہو، تو ی = عم کے

لیے ف (ی) = صف
اس سے ہم ایک دی ہوئی مساوات کی وضعی اصلیں ہیں یا نہیں
معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے لیے ہم کو صرف ف (ی) اور ف (ی) کے مشترک
جز و ضربی کو دیکھنا ہوگا۔ اگر ان میں ی کا کوئی جز و ضربی مشترک نہ ہو تو اس
مساوات کی وضعی اصلیں نہیں ہونگی۔ لیکن اگر ف (ی) اور ف (ی) کا ایک
مشترک جز و ضربی (ی - ۷) ہو، تو ف (ی) کی مساوی اصلیں ہم کے مساوی
ہوں گی۔

مثلاً مساوات ی - ج = سفر کی جہاں ج مستقیم ہے جو سفر کے

مساوی نہیں ہے، 'ن' اصلیں مختلف ہیں۔ کیونکہ 'ن' = صفر کی تمام اصلیں
 ی = صفر ہیں جو دی ہوئی مساوات کو پورا نہیں کرتی۔
 اگر مساوات (ف) = صفر کے سرچشمی ہوں تو ملطف اصلیں مزدوج
 جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں۔

۲۸۔ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر

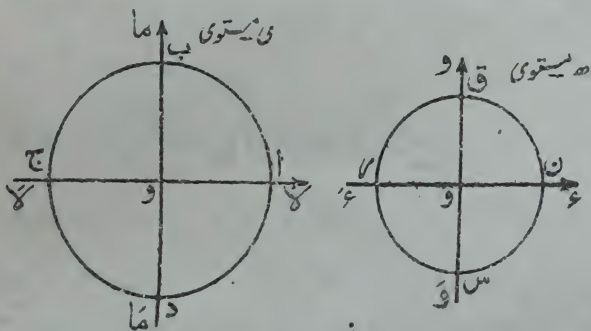
اگر $ھ = (ی، ی)$ کا کوئی تفاعل ہو تو 'ی' کی مختلف قیمتوں کے
 جواب میں ہم $(ی، ی)$ کی تناظر قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔ عام طور پر 'ی' کی قیمتوں
 کو ایک مستوی میں اور $ھ$ یعنی $(ی، ی)$ کی تناظر قیمتوں کو دوسرے مستوی میں
 تعبیر کرتے ہیں۔ جس مستوی میں 'ی' کی قیمتیں درج کی جاتی ہیں 'ی' - مستوی
 کہلاتا ہے۔ اور جس میں $ھ$ کی قیمتیں درج کی جاتی ہیں $ھ$ - مستوی کہلاتا ہے۔
 'ی' مستوی میں حوالہ کے قائم محور $لا$ اور $ما$ ہوتے ہیں۔ $ھ$ مستوی
 میں حوالہ کے محور $عو$ اور $وو$ ہوتے ہیں۔ $لا$ محور 'ی' مستوی کا
 حقیقی محور اور $ما$ محور خیالی محور کہلاتا ہے۔ اس کے تناظر $ھ$ مستوی میں
 $عو$ محور حقیقی محور کہلاتا ہے اور $وو$ محور خیالی محور کہلاتا ہے۔

اگر $ھ = (ی، ی)$ ایک قیمتی تفاعل ہو 'ی' کا اور 'ا' کی 'ی' - مستوی میں
 مختلف راستوں سے 'ا' سے 'ب' تک حرکت کرے تو $ھ$ - مستوی میں مختلف
 راستوں سے $(ی، ی)$ سے $(ب، ب)$ تک حرکت کرے گا۔ کثیر قیمتی تفاعلوں کی
 صورت میں $ھ$ مستوی میں حاصل شدہ آخری نقطہ $ھ$ کی ابتدائی منتخب شدہ
 قیمت اور 'ی' کے 'ی' مستوی میں طے کردہ راستے پر منحصر ہوتا ہے۔

مثال (۱) فرض کرو کہ $ھ = ی^۲$ ، تب $عو = لا^۲$ - اور

و = ۲ لا

اب اگر لا = صفر تو ۶ = -۲ اور ۷ = صفر



شکل (۹)

اس لیے جیسے جیسے 'ی'، 'ما' محور پر - ∞ سے صفر تک حرکت کرتا ہے ۶ - ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے اور اس لیے 'ھ'، '۶' محور پر - ∞ سے صفر تک حرکت کرتا ہے۔ نیز، جب 'ی'، 'ما' محور پر صفر سے $+\infty$ تک حرکت کرتا ہے تو ۶، 'صفر' سے - ∞ تک گھٹتا ہے اور اس لیے 'ھ'، '۶' محور پر صفر سے - ∞ تک پھر واپس حرکت کرتا ہے۔

اس طرح سے یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ جیسے جیسے 'ی'، 'لا' محور پر - ∞ سے $+\infty$ تک حرکت کرتا ہے، 'ھ'، '۶' محور پر $+\infty$ سے صفر تک اور پھر واپس صفر سے $+\infty$ تک حرکت کرتا ہے۔ اس طرح سے 'و' محور کے مثبت اور منفی حصے بالترتیب خطوں 'ما' = لا اور 'ما' = - لا کے متناظر ہیں۔

اگر ہم پھری = (جم طہ + خ جب طہ) اور ھ = ک (جم فہ + خ جب فہ) لکھیں تو ملتا ہے ک = 'ما' اور فہ = ۲ طہ

پس اگر 'ی'، نصف قطر 'ا' والے دائرہ 'ا' ب ج د (شکل ۹) پر واقع ہو تو ھ نصف قطر 'ا' والے دائرہ 'ن' ق 'س' پر ہوگا۔ فرض کرو کہ ابتداء طہ = ۰، تو فہ = ۰۔ تب 'ا' اور 'ن'، 'ی' اور ھ کے ابتدائی مقامات پر ہونگے۔ اب جیسے جیسے 'ی'، ربع 'ا' ب کے گرد مخالف سمت ساعت میں

گھومتا ہے، تو طہ اور فہ، بالترتیب π اور π تک بڑھ جاتے ہیں اور
 ۱/۲ نصف دائرہ ن ق م کے گرد حرکت کرتا ہے۔ اسی طرح سے یہ بھی
 دکھایا جاسکتا ہے کہ جیے جیے ی، ربعوں ب ج، ج د اور د ا کے
 گرد حرکت کرتا ہے، ۱/۲ نصف دائروں م س ن، ن ق م اور م س ن
 پر حرکت کرتا ہے۔ اس طرح جب ی، دائرہ ا ب ج د ایک دفعہ مرتسم
 کرتا ہے تو ۱/۲ دائرہ ن ق م س کو دو دفعہ مرتسم کرتا ہے۔
 اطلاقات میں اکثر یہ ضروری ہوتا ہے کہ جب ی ایک بند منحنی مرتسم
 کرتا ہے تو ۱/۲ کی دلیل میں تبدیلی پر غور کیا جائے اب ہم بعض خاص صورتوں
 پر غور کریں گے۔

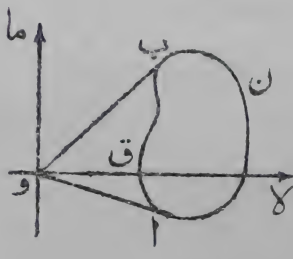


شکل (۱۰)

(۱) ۱/۲ = ی

اس صورت میں دلیل ۱/۲ = دلیل ی
 فرض کرو کہ ی مبداء کے گرد بند منحنی
 ل ھ ن (شکل ۱۰) مرتسم کرتا ہے۔ تب
 اگر ی، ل ھ ن کے گرد ایک دفعہ مثبت
 سمت میں حرکت کرے تو دلیل ی، نیز دلیل
 ۱/۲ میں π کا اضافہ ہوگا۔ اسی طرح سے

اگر ی، منحنی کے گرد ایک بار منفی سمت میں حرکت کرے تو دلیل ی اور دلیل ۱/۲
 دونوں میں π کی کمی ہوگی۔ عام طور پر مثبت یا منفی سمتوں میں ن چکر دایلوں
 کو $\pi + 2\pi$ یا $\pi - 2\pi$ میں بدل دیں گے۔



شکل (۱۱)

اس کے برخلاف اگر ی سے مرتسم شدہ
 بند منحنی ا ن ب ق کے باہر مبداء ہو
 (شکل ۱۱) تو ی اور ۱/۲ کی دلیلیں ا پیرہ و ا
 سے ب پیرہ و ب تک بڑھیں گی اور
 پیرہ و ب سے لا و ا تک گھٹیں گی۔
 یعنی مجموعی تبدیلی صفر کے مساوی ہے۔

دلیل ۵۵ اپنی ابتدائی قیمت پر واپس آتی ہے۔ اور ۵۵ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے جس میں مبدا نہیں ہے۔ لیکن اگر ۱ ایک ایسا بند منحنی مرتسم کرے جس میں ان میں سے ہر نقطہ واقع ہوں تو دلیل ۵۵ میں ۲ سے ۱۱ کا اضافہ ہوگا اور ۵۵ مبدا کے گرد ہر دفعہ حرکت کریگا یا چکر لگائیگا۔

$$(۵) ۵۵ = ۱ - \frac{(۱-۱)}{(۱-۱)}$$

اس صورت میں دلیل ۵۵ = دلیل ۱ + دلیل (۱-۱)۔ دلیل (۱-۱) یا گم ۱ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ۱ ایک بند منحنی گم (شکل ۱۳) یا گم ۲



شکل (۱۳)

مرتسم کرے تو دلیل ۵۵ میں ۱۱ کا اضافہ یا کمی ہوگی، لیکن اگر ۱ گم ۱ اور گم ۲ میں سے کوئی منحنی مرتسم کرے تو دلیل ۵۵ اپنی ابتدائی قیمت اختیار کریگی۔

ان تمام صورتوں سے یہ صاف ظاہر ہے کہ کسی بند منحنی کے مرتسم ہونے سے دلیل ۵۵ میں تبدیلی منحنی کے شکل پر منحصر نہیں ہے حتیٰ کہ نقطوں ۱، ۲، ۳، ۴ کے وہی جٹ اُس کے اندر ہیں یا باہر۔ یہ عام طور پر سہولت دہ ہوتا ہے کہ منحنی ایک دائرہ کی شکل میں لیا جائے۔

۲۹۔ مساواتوں کی اصلیں

اب ہم مساوات

$$f(y) = 1.y^1 + 1.y^2 + \dots + 1.y^n + \dots$$

کی حقیقی اور ملف اصلیں جو ی مستوی کے مختلف خطوں میں واقع ہیں معلوم کرتے ہیں اور ہم نے دیکھا ہے کہ اس مساوات کو شکل

$$1.y^1 + 1.y^2 + \dots + 1.y^n + \dots$$

اگر ی کو ی مستوی کے اندر مثبت سمت میں ایک ایسے بند گھیرے کے

گرد جو ی^۱، ی^۲، یⁿ میں سے ہر نقاط کو گھیرتا ہے لیں، تو f(y)

کی دلیل میں ۲ یا ۳ کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے ایک دیے ہوئے گھیرے

کے اندر f(y) = صفر کے اصلوں کی تعداد، اُس گھیرے کے گرد ی کی حرکت

کی وجہ سے دلیل f(y) کی تبدیلی کو دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

ذیل کا مسئلہ اصلوں کا مقام معلوم کرنے کے لیے مفید ثابت ہوگا۔

مسئلہ۔ اگر ی کو ایک بڑے دائرے کے کسی حصہ کے گرد جس کا

مرکز مبدا ہے اور نصف قطر ہے لیا جائے اور اگر دلیل ی میں تبدیلی

طہ ہو تو f(y) کی دلیل میں تبدیلی مائل بہ ن طہ ہوگی جبکہ مائل بہ لا متناہی

ہوتا ہے۔

$$\text{کیونکہ } f(y) = 1.y^1 + 1.y^2 + \dots + 1.y^n + \dots$$

$$\text{اس لیے دلیل } f(y) = n \text{ دلیل } y + 1.y^1 + 1.y^2 + \dots + 1.y^n + \dots$$

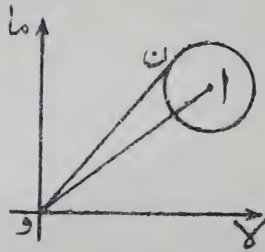
$$ab \left| 1.y^1 + 1.y^2 + \dots + 1.y^n + \dots \right| \geq k$$

$$\text{جہاں } k = \frac{1}{r^1} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n} + \dots$$

فرض کرو کہ م کو ہم اتنا بڑا منتخب کرتے ہیں کہ

$$k > \left| 1.y^1 + 1.y^2 + \dots + 1.y^n + \dots \right| \text{ کو اُس دائرہ کے}$$

اندرواقع ہونا چاہیے جس کا مرکز O یا $(شکل ۱۳)$ ہو اور نصف قطر r ہے۔ اگر



شکل (۱۳)

و n اس دائرہ کا مماس ہو تو دلیل $(1 + \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} + \dots + \frac{n}{y^n})$ اور
دلیل 1 کا فرق ایک ایسے زاویہ θ کے مساوی ہوتا ہے جو زاویہ α و n سے
بڑا نہیں ہے اور جس کو n کو بڑھانے سے یعنی k کو گھٹانے سے جتنا چاہے
چھوٹا کیا جاسکتا ہے۔

یعنی دلیل $f(y) = n \times$ دلیل $y \neq$ دلیل $1 \neq \theta$

اس لیے نہ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y) = n \times$ دلیل $y +$ دلیل 1

اس لیے جب n مائل بہ لامتناہی ہو تو دلیل $f(y)$ میں تبدیلی، دلیل y
میں تبدیلی کے n گنا کی طرف مائل ہوتی ہے۔

مثال (۲) مساوات $1 + y^2 + y^4 + \dots = \infty$ صفر کے اصولوں کے مقام
کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ $\infty = 1 + y^2 + y^4 + \dots$ اور فرض کرو کہ y ذیل کے تین
حصول والا گھیرا منقسم کرتا ہے

(۱) لا محور صفر سے ∞ تک

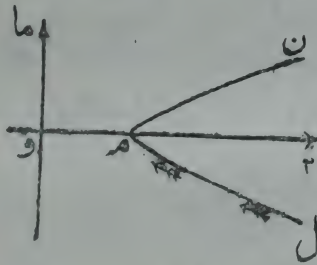
(۲) مرکز O اور نصف قطر لامتناہی والے دائرہ کا پہلا ربع

(۳) ما محور $0 + \infty$ سے صفر تک

(۱) لا محور پر کے نقاط کے لیے $\infty + ۶ = ۰$ لا^۲ + لا^۱ + ۱ جس سے $۶ = لا^۲ + لا + ۱$ اور $۰ = صفر$ اس لیے جیسے جیسے 'ی' لا محور پر صفر سے ∞ تک حرکت کرتا ہے، ۶ محور پر اسے ∞ تک حرکت کرتا ہے۔ اس لیے دلیل مستقیم رہتی ہے اور صفر کے مساوی ہے۔

(۲) بڑے دائرہ کی وجہ سے دلیل میں $\frac{\pi}{۲}$ کا اضافہ ہوتا ہے اس لیے اوپر کے مسئلہ سے دلیل $\pi + ۲$ کا اضافہ ہوتا ہے۔

(۳) ما محور پر کے نقاط کے لیے $۶ = (ما + ۱)$ اور $۰ = - ما^۲$ اس لیے ۶ ، ان مساواتوں سے حاصل شدہ لاقتناہی منحنی ل م ن (شکل ۱۵) پر واقع ہوتا ہے اور جیسے جیسے 'ما' ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے



شکل (۱۵)

اس منحنی پر ∞ محور کے نیچے لاقتناہی سے نقطہ $م$ ($۶ = ۱$) تک نشان کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔ اس لیے دلیل ۶ کی ابتدائی اور آخری قیمتیں دونوں صفر کے مساوی ہیں۔

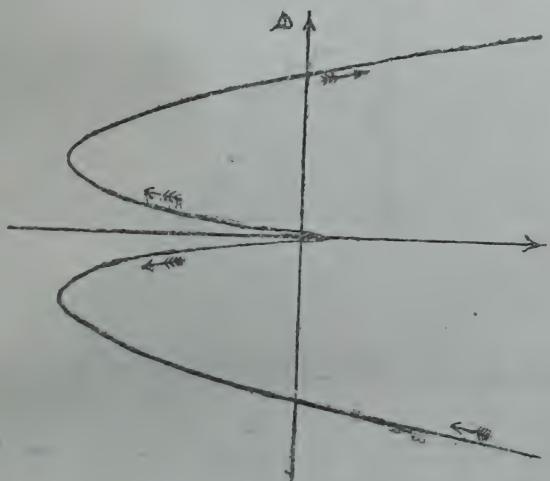
اس لیے 'ی' کے اس گھیرے کے گرد چکر لگانے سے دلیل $\pi + ۲$ کی تبدیلی ہوتی ہے جس سے حاصل ہوتا ہے کہ پہلے ربع میں اس مساوات کی ایک اور صرف ایک اصل واقع ہے۔

اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ دوسرے ربعوں میں سے ہر ایک میں اس مساوات کی صرف ایک اصل واقع ہے۔

پھر فرض کرو کہ 'ی' گھیرا و ا ب ج (شکل ۱۶) ترسیم کرتا ہے۔

نقطتی -

پھر فرض کرو کہ صا = ۳ - ۲ + ۱ ت اور عا = ۲ + ۲ ت
تب ان مساواتوں سے حاصل شدہ منحنی (شکل ۱۴) کی طرح کا ہے۔



شکل (۱۴)

نشان کی سمت نقطہ (صا، عا) کا تغیر جیسے ت - ∞ سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے۔

اب جب ت = صفر، تو صا = ۳ اور عا = صفر تب دلیل (صا + خ عا) = صفر نیز جب ت = ۱، تو صا = ۸ اور عا = ۲، اس لیے دلیل (صا + خ عا) = ۱۶ جہاں ۱۶ دوسرے ربع کا وہ زاویہ ہے جس کے لیے مس طہ = $\frac{1}{16}$ اس لیے ی کے ربع ا ب ج مرسم کرنے سے دلیل ۱۶ میں تبدیلی مساوی ہے۔

$$\pi^2 + \text{طہ} = \pi^2 - \text{مس}^2 \left(\frac{1}{16}\right)$$

آخر کار وجہ پر کے نقاط کے لیے ۱۶ = (۱ + ۲) اور ۱۶ = ۱۶
اس لیے منحنی لہر پر ہوتا ہے (شکل ۱۵)

جب $a = 1$ ، تو نقطہ $[x = 2, y = 0]$ پر ہوتا ہے اور

دلیل $y = 0$ - مست $(\frac{1}{2})$

لیکن جب $a = 0$ تو وہ نقطہ $(x = 1, y = 0)$ پر ہوتا ہے اس لیے راستہ ج و کے تمام ہونے سے دلیل میں تبدیلی (مست $\frac{1}{2}$) ہے یعنی پورے چکر کی وجہ سے دلیل میں تبدیلی ۳۳۲ ہوتی ہے۔ اس لیے وہ اصل جو پہلے ربع میں واقع ہے اکائی نصفہ قطر کے دائرہ کے اندر ہے۔

اسی طرح سے یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ چوتھے ربع کی اصل اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ہے لیکن بقیہ دو اصلیں اس کے باہر ہیں۔

پھر یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ بقیہ چار اصلیں دائرہ $|y| = 2$ کے اندر ہیں۔

کیونکہ اگر $y = 2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ تو

$$\frac{\{ (25-102x^2+9x^4) + (64-x^2) \}}{(1-x^2)^2} = 0$$

اب منحنی صا $= (25-102x^2+9x^4)$ ، عا $= (64-x^2)$ شکل (۱۸)



شکل (۱۸)

میں دکھائے ہوئے معنی کی قسم کا ہے نشان کی سمت نقطہ (صا، عا) کا تغیر جیسے
ت' - ∞ سے ∞ تک حرکت کرتا ہے بتلاتی ہے۔ لیکن جیسے جیسے
دلیل (ی) - π سے π تک بدلتی ہے 'ت' - ∞ سے ∞ تک
بدلتا ہے۔

اور اس لیے دلیل (صا + عا) میں π کا اضافہ ہوتا ہے۔

نیز دلیل $\left\{ \frac{1}{(1-x)^2} \right\}$ کی وجہ سے π کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے
دلیل ∞ میں جملہ π کا اضافہ ہوتا ہے۔ یعنی اس مساوات کی چاروں اصلیں
دارہ | ی | = ۲ کے اندر ہیں۔

۳۰۔ کثیر قیمتی تفاعل — تحلیلی تفاعل کی ہم نے

تعریف کی ہے کہ یہ تفاعل یک قیمتی ہو۔ لیکن بہت سے ابتدائی تفاعل مثلاً
ی (جہاں صحیح عدد نہیں ہے) 'لوک ی' 'جب ی' وغیرہ کثیر قیمتی تفاعل
ہیں۔ کثیر قیمتی تفاعلوں کی قیمتوں کی تشریح کے لیے آسان صورت $\infty = ی$
پر غور کرو۔

$$\infty = ی، اگر ی = ی = (جم ط + خ جب ط) تو$$

دو قیمتیں۔

$$۱ = (جم ط + خ جب ط)$$

$$اور ۲ = (جم ط + خ جب ط)$$

$$اب ۳ = (جم ط + خ جب ط) + (جم ط + خ جب ط) = ۲$$

مقداروں ۱ اور ۲ میں سے ہر ایک ی کے ساتھ بدلتی ہے اور اس لیے
ان میں سے ہر ایک ی کا ایک تفاعل ہے ان کو دو قیمتی تفاعل کے شاخیں

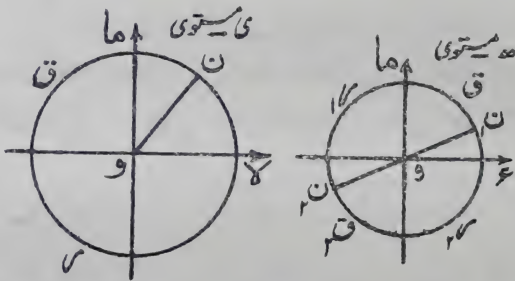
کہتے ہیں -

فرض کرو کہ y نقطہ n (سما، y) [شکل (۱۹)] سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور فرض کرو کہ y اور y کی ابتدائی قیمتیں

$$y = \frac{1}{2} \left\{ \text{جہم} \left(\frac{y}{2} \right) + \text{خ جب} \left(\frac{y}{2} \right) \right\} \text{ اور } y = -y$$

تب y اور y ، مستوی میں نقاط n [سما، $\frac{y}{2}$] اور n [سما، $\frac{y}{2} + \pi$] سے

تعبیر ہو گئے -



شکل (۱۹)

اب اگر y دائرہ n ق y ، جس کا مرکز o ہے اور نصف قطر y ہے کے گرد حرکت کرے تو طہ میں π کا اور دلیل y میں π کا اضافہ ہوتا ہے - نتیجہ کے طور پر y مستوی میں y نصف دائرہ n ق y ، n کے گرد اور y نصف دائرہ n ق y ، n کے گرد حرکت کریگا - y اور y کی آخری قیمتیں y اور y ہونگی - اس لیے مبداء کے گرد y کا ایک چکر y کی شاخیں بدل دیتا ہے - ایسے دو چکر y اور y کو اپنی ابتدائی قیمتوں پر لے آتے ہیں - ترسیمی طور پر اگر y دائرہ n ق y کے گرد دو دفعہ کرے تو y اور y میں سے ہر ایک دائرہ n ق y ، n کے گرد ایک دفعہ حرکت کرتا ہے -

اگر y سے مرتسم شدہ راستہ میں مبداء شامل نہ ہو تو طہ اپنی ابتدائی

قیمت ۷ اور ۷ اور ۷ اپنی ابتدائی قیمتیں ۷ اور ۷ اختیار کریں گے۔
نقطہ و کوہ کا شاخ نقطہ کہتے ہیں کیونکہ اس کے گرد ایک چکر سے
تفاعل کی شاخیں بدل جاتی ہیں۔

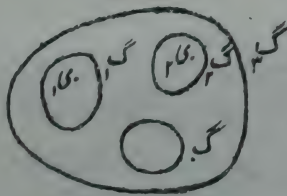
مثال (۳) ۷ = ۷ (۱-۱) ۱ اس صورت میں دلیل ۷

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ دلیل (۱-۱)}$$

یہ ایک اور دو قیمتیں تفاعل ہے۔ ۱ کے گرد ایک واحد چکر سے شاخیں
بدل جاتی ہیں۔ لیکن دوسری چکر سے شاخیں پھر اپنی ابتدائی قیمت پر واپس آتی ہیں۔
اس کے برخلاف ایسے راستہ پر چکر لگانے سے جس میں مبداء شامل نہیں ہے
شاخوں میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اس صورت میں ۱ ۷ کا شاخ نقطہ ہے۔

مثال (۴) ۷ = ۷ (۱-۱) ۱ (۱-۱) ۱

اس صورت میں دلیل ۷ = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ دلیل (۱-۱) ۱ + $\frac{1}{2}$ دلیل (۱-۱) ۱
اس لیے گ ۱ (شکل ۲۰) یا گ ۲ کو مرسم کرنے سے شاخیں بدل جاتی ہیں۔



شکل (۲۰)

لیکن گ ۲ اور گ ۳ کے مرسم کرنے سے کوئی فرق نہیں آتا۔ اس طرح ۱ ۷
اور ۱ ۷ کے شاخ نقطے ہیں۔

مثال (۵) ۷ = ۷ (۱-۱) ۱

مسائل حل نہیں ہے بلکہ یہ 'ی' کا دو قیمتی تفاعل ہے۔ ہ کی دو قیمتوں

$\sqrt{1} = 1$ اور $\sqrt{1} = 1$ کو ہم نے دہرائی

تفاعل 'ہی' کی شاخیں کہا ہے۔ ان شاخوں میں سے ہر ایک کو مستوی میں یک قیمتی بنایا جاسکتا ہے اگر ہم ایک خط، مبدا سے لاقنا ہی تک، ثبت حقیقی محور کے ساتھ لیں جس پر سے ہ گزر نہیں سکتا اور اس خط پر کے نچلے اور اوپر کے نقاط پر تفاعل کی قیمتوں میں تمیز کیا جائے۔ ایسے خط کو جس پر سے ہ گزر نہیں سکتا ٹرچجی کاٹ (Cross-cut) کہتے ہیں۔

اگر شکل (۲۲) میں $\omega = 1$ - لا. تو

شکل (۲۲)

اور ب (طہ = ۳۳) پر ہم کی قیمت

یہاں سے کوئی ایک مہد، کے گرد پورا چکر نہیں کر سکتا اس لیے اگر ہم
 ی کی اس قیمت سے حرکت شروع کریں جو شاخ ۴ کی ہے، تو ہم کبھی شاخ ۴
 کی کسی قیمت پر نہ پہنچیں گے۔

دو قیمتی تفاعل = ی کو، ایک قیمتی تفاعل کے طور پر بیان کر سکتے
کے لیے ایک اور طریقہ ہے جس میں ایک سطح کی بجائے پڑتی ہے جس کے
ریمان کی سطح کہتے ہیں۔

اس کے لیے ہم کو ہی مستوی کی بجائے دوستوی س^۱ اور س^۲ لینے ہونگے۔ ہم س^۱ کو س^۲ کے اوپر رکھا ہوا (Superposed) سمجھ سکتے ہیں اور بتائے ہوئے طریقہ کی طرح اگر ہم دوستویوں کے درمیان ایک ترجیحی کاٹ لیں تو ہم یہ قرارداد اختیار کرتے ہیں کہ س^۱ کی نچلی ترجیحی کاٹ کا س^۲ کے اوپر کی ترجیحی کاٹ کے سرے سے ملا ہوا ہے اور س^۲ کی ترجیحی کاٹ کا نچلا سر^۱ س^۱ کی ترجیحی کاٹ کے اوپر کے سرے سے ملا ہوا ہے۔

تفاعل ۵ = لوک ی پر غور کرو۔

چونکہ ۵ = لوک ۱ + خ (طہ + ۲ ک ۳) ک کی ہر صحیح عددی قیمت سے تفاعل کی ایک شاخ ملتی ہے۔ یعنی لوک ی کی اکثر قیمتیں تفاعل سے اس صورت میں ہم لوک ی کو بے شمار ایک دوسرے پر رکھی ہوئی مستویوں سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ جس میں سے ہر ایک کے حقیقی مثبت محور کے ساتھ ترجیحی کاٹ لی گئی ہو اور ہر ایک ترجیحی کاٹ کا کونہ اُس کے مقابلہ کی منجلی ترجیحی کاٹ کے کونے سے ملایا گیا ہو۔ اس صورت میں ابتدائی مقام پر لوک ی نہیں آ سکتا۔

۵ = $\{ (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) \}$ کے لیے ہم نقطوں ی = ۱ اور ی = ۲

کو ملانے والے خط کے ساتھ ترجیحی کاٹ لیتے ہیں۔ اور مستویوں ۱ اور ۲ کو ترجیحی کاٹ کے ساتھ چلیبی طور پر ملاتے ہیں۔ اس صورت میں لامتناہی شاخ نقطہ نہیں ہے۔

امثلہ نمبری (۵)

(۱) فرض کرو کہ ۵ = $\sqrt{۲-۲ ی+ ی^۲}$ اور فرض کرو کہ ی مرکز ی = ۱ + خ اور نصف قطر ۲ والا دائرہ مثبت سمت میں مرتسم کرتا ہے۔ اگر ی نقطہ ۱ سے حرکت کرنا شروع کرے جبکہ ۵ کی قیمت ۲ ہو تو ۵ کی قیمتیں معلوم کرو۔
جبکہ (i) ی و پر واپس آتا ہے۔
(ii) ی ما محور کو قطع کرتا ہے۔

جواب (i) ۲ - (ii) $\sqrt{۲}$ جم $(\frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۸})$ + خ جب $(\frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۸})$

جہاں ۱ دوسرے ربع کا زاویہ ہے جس کے لیے مس لہ = ۳ -

(۲) فرض کرو کہ ۵ = $\sqrt{۲-۲ ی+ ی^۲}$ اور ی مرکز ی = ۱ + خ اور نصف قطر ۲ والا دائرہ مثبت سمت میں مرتسم کرتا ہے۔ اگر ی نقطہ نقطہ ۱ سے حرکت کرنا

شروع کریں جبکہ کی قیمت ۲ ہو تو یہ دائرہ ما محور کو پہلی اور دوسری مرتبہ جن نقطوں پر کاٹتا ہے اُن پرہ کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$(i) \quad 2\sqrt{2} \pm \sqrt{32+20} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

جہاں ۲ دوسرے ربع کا زاویہ ہے جس کے لیے $\cos = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ ۔

$$(ii) \quad 2\sqrt{2} \pm \sqrt{32-20} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

جہاں ۲ دوسرے ربع کا زاویہ ہے جس کے لیے $\cos = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ ۔

(۳) وجہ اد، و، ع، ب، ف، دائرے ہیں جہاں و، ا، ب، ج، د، ع، ف بالترتیب نقاط (۰، ۰)، (۰، ۲)، (۰، ۶)، (۰، ۱)، (۱، ۱)، (۱، ۱)۔

(۳، ۳)، (۳، ۳) ہیں۔ اگر $\sqrt{2} = \sqrt{(۱-۱)^2 + (۱-۱)^2}$ اور اگر $\sqrt{2} =$

جب $\sqrt{2} =$ صفر تو ہ کی قیمتیں ۱ پر معلوم کرو جبکہ ی، و سے ایک حرکت

کرے۔

(۱) وجہ ا کی سمت میں

(۱) وجہ ا کی سمت میں

نیزی کی قیمت ب پر معلوم کرو جبکہ ی، و سے ب تک حرکت کرے۔

(۱) وجہ ب کے ساتھ جواب - خ، ۲، ۲، ۲

(۱) وجہ ب کے ساتھ - ۲، ۲، ۲، ۲

(۴) ثابت کرو کہ مساوات $۱ + ی + ی =$ صفر کی ہر ایک ربع میں ایک اصل ہے

اور پہلے ربع کی اصل دائرہ $|۱| = |۱|$ کے باہر اور دائرہ $|۱| = |۱|$

کے اندر ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مساوات $۱ + ی + ی =$ صفر کی جو اصل پہلے ربع میں واقع ہے

اُس مربع کے اندر واقع ہے جس کے ضلع $۱ = ۱$ ، صفر $۱ = ۱$ ، اور $۱ = ۱$ ہیں

(۶) ثابت کرو کہ مساوات $۱ + ی + ی =$ صفر کی ہر ایک ربع میں

ایک اصل ہے۔

- (۷) ثابت کرو کہ مساوات $۵ - ی + ۱۶ =$ صفر کی دو اصلوں کے حقیقی حصے مثبت ہیں اور تین کے حقیقی حصے منفی ہیں۔ نیز یہ بھی دکھاؤ کہ تمام پانچوں اصلیں دائرہ $|ای| = ۱$ کے باہر اور دائرہ $|ای| = ۲$ کے اندر ہیں۔
- (۸) ثابت کرو کہ مساوات $۵ + ۱۰ ی - ۱ =$ صفر کی صرف وہ اصل جو دائرہ $|ای| = ۱$ کے اندر ہے حقیقی اور مثبت ہے۔
- (۹) ثابت کرو کہ مساوات $۵ + ۱۰ ی - ۱ =$ صفر کی کوئی اصل ایسی نہیں ہے جس کا مقیاس ۲ سے بڑا ہو۔
- (۱۰) ثابت کرو کہ مساوات $۵ + ۲ ی + ی + ۳ =$ صفر کی اصلیں مطلق قیمت میں ۱۵۶ سے کم ہیں۔
- (۱۱) اگر ۱ اور $ب$ حقیقی اور مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات $۴ + ۱ ی + ب =$ صفر کی ۲ اصلیں خیالی محور کی سیدھی طرف اور ۲ بائیں طرف ہیں۔ اگر $ب$ منفی ہو تو ثابت کرو کہ $(۲ + ۱)$ اصلیں خیالی محور کی سیدھی طرف اور $(۲ - ۱)$ اصلیں بائیں طرف ہیں۔
- (۱۲) اگر ۱ اور $ب$ حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات $۴ - ۱ + ۱ ی + ب =$ صفر کی ۲ یا $(۲ - ۱)$ اصلیں، ۱ محور کی سیدھی طرف ہیں اس طرح کہ $ب$ مثبت ہے یا منفی۔
- (۱۳) اگر $۱ = جب 'ای' تو ثابت کرو کہ ۱۱ ± ۱۱ خ لوک {خ ی + ۱ - ۱ ی}$ ، بموجب اس کے کہ $ک$ جفت ہے یا طاق جبکہ لوک ${خ ی + ۱ - ۱ ی}$ کے ایک قیمتی ہونے کے لیے ترجیحی کاٹ حقیقی محور کے ساتھ ساتھ '۱ سے ۱۰۰ اور ۱۰۰ سے ۱ تک لی جائے۔

باششم

ابدال اور ہم شکل تعبیر

۳۲- ابدال — اگر φ ، ψ کا کوئی تفاعل $f(\psi)$ ہو

تو φ اور ψ کے باہمی رشتہ کو ہندسی طور پر تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ اور تب اس رشتہ کو بدل کہا جاتا ہے۔ نیز یہ کہا جاتا ہے کہ بدل $\varphi = f(\psi)$ کے ذریعہ نقطہ ψ کو متناظر نقطہ یا نقطوں φ میں بدلا گیا ہے۔

اگر $\varphi = \psi + \psi$ ، تو بدل خطی بدل کہلاتا ہے۔

اگر $\varphi = \frac{f(\psi)}{g(\psi)}$ جہاں $f(\psi)$ اور $g(\psi)$ کثیرالارقام جملے ہیں تو بدل کو منطقی بدل کہتے ہیں۔

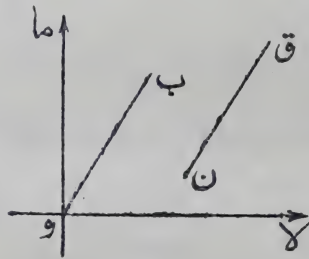
شکل $\varphi = \frac{\psi + \psi}{\psi + \psi}$ کے ابدال دو خطی ابدال

(Bilinear transformations) کہلاتے ہیں۔

اب ہم خطی اور دو خطی ابدالوں کے ہندسی معنی معلوم کرتے ہیں۔

(۱) $\varphi = \psi + \psi$

فرض کرو کہ 'ن' 'ق' اور 'ب' (شکل ۲۳) بالترتیب نقاطی 'ھ' اور 'ب' کو تعبیر کرتے ہیں تب چونکہ $ن = ق - ب$ اس لیے اس بدل کا اثر یہ ہوتا ہے کہ ہر ایک نقطہ 'ی' پر، مقدار اور سمت میں 'ب' کے مساوی مقام کی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔



شکل (۲۳)

$$(۲) ھ = ل + ی$$

اس بدل سے حاصل ہوتا ہے $ھ = ل + ی$ اور

$$دلیل ھ = دلیل ل + دلیل ی$$

نتیجہ کے طور پر اگر 'ن' اور 'ق' بالترتیب نقاطی 'ھ' اور 'ب' ہوں تو نقطہ 'ن' سے نقطہ 'ق' حاصل ہوگا اگر سمتی نیم قطروں کو زاویہ 'دلیل ل' میں سے گمائیں اور اس کو پھر 'ا' سے ضرب دیں۔
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ مستوی کی کوئی شکل اس بدل سے متشابہ شکل میں بدل جاتی ہے۔

$$(۳) ھ = ل + ی + ب$$

اس عام خطی بدل کا اثر سلسلہ دار ابدال ۱ اور ۲ کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ بدل ۲ کی طرح اس سے مستوی کی کوئی شکل متشابہ شکل میں

بدل جاتی ہے -

متناظر نقطوں کے درمیان فاصلوں کی نسبت مساوات

$$\left| \frac{۲۵ - ۱۵}{۱۵ - ۱۱} \right| = \left| \frac{۱۱}{۱} \right| \text{ سے حاصل ہوتی ہے -}$$

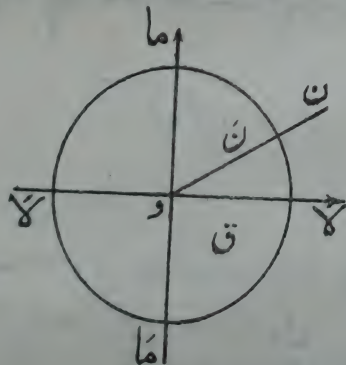
اور متناظر خطوں کے درمیان زاویہ مساوات

$$\text{دلیل } (۲۵ - ۱۵) - \text{دلیل } (۱۱ - ۱) = \text{دلیل } ۱ \text{ سے حاصل ہوتا ہے -}$$

$$\frac{۱}{۱۱} = ۵ (۳)$$

اس صورت میں $\left| \frac{۱}{۱۱} \right| = ۵$ اور دلیل $۵ = -$ دلیل ۱

اب فرض کرو کہ شکل (۲۳) میں ن نقطہ ۱ ہے، اور ن دائرہ ۱ = ۱ کے لحاظ سے ن کا مقلوب نقطہ ہے - تب ن کا مقیاس $\frac{۱}{۱۱}$ ہے اور اس کی



شکل (۲۳)

دلیل، دلیل ۱ کے مساوی ہے - پھر فرض کرو کہ لا محور کے لحاظ سے ن کا خیال ق ہے - تب ق کا مقیاس $\frac{۱}{۱۱}$ ہے اور اس کی دلیل - دلیل ۱ ہے - اس لیے ق، نقطہ ۵ ہے -

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ بدل ایسے دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز مبدا پر ہے اور نصف قطر اکائی ہے، تقليب کا عمل کے پھر لا محور میں خیال

لینے کے معادل ہے -

لائتناہی پر کا نقطہ — جیسے جیسے ی لائتناہی کی طرف

ہوتا ہے، مبداء کے قریب آتا جاتا ہے ملطف متغیر کے نظریہ میں لائتناہی کو ایک نقطہ تصور کیا جاتا ہے یعنی یہ وہ نقطہ ہے جس کا مبداء کے ساتھ تعلق بذریعہ بدلی

مندی حاصل ہوتا ہے -

$$\frac{1}{y} = \infty \quad (5)$$

اس کو ابدال ۳ اور ۲ کو یکے بعد دیگرے لینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے -

$$\text{عام دوخطی بدل} = \frac{1+y}{x+y} = \frac{1}{x} \quad \text{جہاں } \frac{1}{x} \neq \frac{1}{y}$$

(اگر $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ ، تو یہ مستقل ہے -)

اس بدل کو لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{x} + \frac{b - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = \infty$$

اس لیے یہ بدل حاصل ہوگی، اگر ہم تین ابدال ۱، ۲، ۳ کو ملائیں، $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ جہاں

$$k = \frac{b - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} \quad \text{اور } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{k} \quad \text{کو ملائیں - یہ بھی دیکھا جائے کہ}$$

مندی سے بھی دوخطی بدل ۱ $= \frac{(b - \frac{1}{x})}{(\frac{1}{y} - \frac{1}{x})}$ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے -

چونکہ ایک دائرہ کا منقلب ایک دائرہ یا خط ہوتا ہے، یہ معلوم ہوتا ہے کہ

دو خطی بدل سے دائرے، دائروں میں یا خطوں میں بدل جاتے ہیں۔

مثال (۱) دائرہ لا^۲ + ما^۲ - م^۲ = صفر کا متناظر منحنی بذریعہ بدل

$$\infty = \frac{(۳ + ی۲)}{(۳ - ی۲)} \text{ معلوم کرو۔}$$

$$\text{چونکہ } \infty = ۲ + \frac{۱۱}{۳ - ی} \text{ یہ بدل متواتر ابدال}$$

$$(۱) ی = ۱۱ = ۳ - ی، (۲) ی = ۲، (۳) ی = ۳، ۱۱ \times ی = ۱۱ اور$$

$$(۴) \infty = ۳ + ۲ \text{ کا اطلاق کرنے سے بھی حاصل ہوتی ہے۔}$$

$$\text{بدل (۱) سے حاصل ہوتا ہے لا} = لا + ۱، م = م + ۱، ما = ما + ۱$$

$$\text{اس لیے (لا، م + ۱) + (م + ۱) - م = صفر}$$

$$\text{بدل (۲) سے ملتا ہے لا} = \frac{لا}{لا + ۱}، ما = \frac{ما - ۱}{لا + ۱}$$

$$\text{جس سے } ۱۶ (لا + ۱) + ۸ (لا + ۱) + م + ۱ = صفر$$

$$\text{پھر بدل (۳) سے لا} = \frac{لا}{۱۱}، \text{ اور ما} = \frac{ما}{۱۱}$$

$$\text{اس لیے } ۱۶ (لا + ۱) + ۸ (لا + ۱) + م + ۱ = صفر$$

$$\text{آخر میں، اگر } ۶ + ۶ + ۶ = صفر، تو بدل (۴) سے حاصل ہوتا ہے۔$$

$$لا = ۶ - ۶، \text{ اور ما} = ۶ - ۶$$

اس لیے دیا ہوا دائرہ

$$\text{دائرہ } ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۶ + ۶ + ۶ = صفر میں بدل جاتا ہے۔$$

$$\text{مثال (۲) اگر } \frac{ل + ی}{ج + د} \text{ اور اگر نقاط } \infty، \infty، \infty \text{ اور } \infty$$

بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د اور ی، م کے متناظر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(۳ - ی)(۲ - ی)}{(۳ - ی)(۲ - ی)} = \frac{(۳ - ی)(۲ - ی)}{(۳ - ی)(۲ - ی)}$$

$$\frac{1}{ج} + \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} = \frac{۱ + ی}{ج + ی} = ۱$$

$$\text{اس لیے } \frac{(۲۵۵ - ۳۵۵)(۲۵۵ - ۱۵۵)}{(۳۵۵ - ۴۵۵)(۴۵۵ - ۱۵۵)} =$$

$$\left\{ \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} - \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} \right\} \left\{ \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} - \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} - \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} \right\} \left\{ \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} - \frac{\frac{رج-بد}{۲ج}}{\frac{۱}{ج} + ی} \right\}$$

$$\left(\frac{۱}{ج + ی} - \frac{۱}{ج + ی} \right) \left(\frac{۱}{ج + ی} - \frac{۱}{ج + ی} \right) =$$

$$\left(\frac{۱}{ج + ی} - \frac{۱}{ج + ی} \right) \left(\frac{۱}{ج + ی} - \frac{۱}{ج + ی} \right)$$

$$\frac{(۱ - ۱)(۱ - ۱)}{(۱ - ۱)(۱ - ۱)} =$$

یا (۱ - ۱)(۱ - ۱) = (۱ - ۱)(۱ - ۱) (۱ - ۱)(۱ - ۱)
جہاں (۱ - ۱)(۱ - ۱) اور (۱ - ۱)(۱ - ۱) اوپر کے مساوات کی بائیں جانب کے جملہ کو تعبیر

کرتا ہے۔
یہ جملہ چار نقطوں '۱'، '۲'، '۳' اور '۴' کی چلیبی نسبت کہلاتا ہے
کسی دو خطی بدل سے چلیبی نسبت کی قیمت نہیں بدلتی۔ یعنی یہ دو خطی بدل کے
ایچے غیر متغیر (invariant) ہے۔
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ کسی دو خطی بدل کو جو تین نقطوں '۱'، '۲'، '۳' سے

اگو متناظر نقطوں A, B, C, D میں بدل دیں، شکل

(ی ی ا ی ا ی ا) = (ص ص م ص م) میں لکھا جاسکتا ہے۔

چونکہ تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ہم خط نہ ہو ایک دائرہ گزر سکتا ہے، اس لیے ہم ایک ایسی بدل معلوم کر سکتے ہیں جس سے y_1 ، y_2 ، y_3 میں سے گزرنے والا دائرہ cc_1 ، cc_2 ، cc_3 میں سے گزرنے والے دائرہ میں بدل جائے۔ یعنی ایک دوخطی بدل ہمیشہ اس طرح کی معلوم کی جاسکتی ہے کہ y مستوی کا کوئی دائرہ cc_1 مستوی کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں بدل جائے۔ اسی طرح سے y ، مستوی کا کوئی خط cc_1 مستوی کے ایک دیے ہوئے خط میں بدل دیا جاسکتا ہے۔ خاص طور پر y کے حقیقی محور کو y_1 ، y_2 ، y_3 cc_1 ، cc_2 ، cc_3 کو حقیقی قیمتیں دینے سے cc_1 ، cc_2 ، cc_3 کے حقیقی حصہ میں بدل دیا جاسکتا ہے۔ y مستوی کا دائرہ cc_1 مستوی کے اندر صرف دائرہ ہی میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا بلکہ cc_1 مستوی کے اندر اس کو ایک خط میں بھی بدل دیا جاسکتا ہے۔

مثال (۳) وہ دو خطی بدل معلوم کرو جس سے y مستوی کے

نقاط 'ا'، 'خ'، 'ا'، 'ه' مستوی میں بالترتیب 'ا'، 'ا' کے متناظر ہوں۔ ثابت کرو کہ اس بدل سے دائرہ $|y| = 1$ کا رقبہ 'ه' مستوی میں حقیقی محور کے اوپر کے نصف مستوی سے تعبیر ہوتا ہے۔

چونکہ y مستوی کا نقطہ (۱) \in مستوی کے نقطہ صفر کے مناظر ہے
اور y مستوی کا نقطہ $(-۱) \in$ مستوی کے نقطہ ∞ کے مناظر ہے۔

اس لیے بدل کو شکل $= 1 - \frac{1-y}{1+y}$ میں لکھ سکتے ہیں۔

نیز معلوم کرنے کے لیے مستوی کا نقطہ 'x'، مستوی کے نقطہ ۱ کے متناظر ہے۔

$$\frac{1-j}{1+j} \uparrow = 1$$

اس لیے $1 = \frac{x+1}{x-1}$

$$\frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \text{ سے } ۱ \text{ اور } ۱ = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{جس سے } ۱ = \frac{۳}{۲} \times ۲ = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی } ۱ - ۱ = \text{صفر}$$

$$\text{بدل } ۲ \text{ سے } (۱ + ۱) = ۲ \text{ -- } ۱ = ۱ \text{ [۱ - ۱ = ۰]}$$

$$\text{یعنی } ۲ - ۱ = ۱ \text{ [۱ - ۱ = ۰]}$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ = ۲$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ = ۲$$

$$\text{جس سے } ۱ - ۱ = ۰ = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی } ۱ = \text{صفر}$$

جس سے صاف ظاہر ہے کہ دائرہ | ی | = ۱، یہ مستوی کے حقیقی محور میں بدل جاتا ہے۔

اس کو دیکھنے کے لیے کہ دائرہ کا اندرونی حصہ یہ مستوی کے اوپر کے نصف حصہ کے تناظر ہے۔

$$\text{رکھو } ۱ = \text{سر فوطہ جہاں } ۱ > ۱$$

$$\text{تب } ۱ = \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱}$$

$$\text{یہ } ۱ = \frac{۱ - \text{سر فوطہ}}{۱ + \text{سر فوطہ}}$$

$$= \frac{(۱ - \text{سر فوطہ}) (۱ + \text{سر فوطہ})}{(۱ + \text{سر فوطہ}) (۱ + \text{سر فوطہ})}$$

$$= \frac{(۱ - \text{سر فوطہ}) + (\text{سر فوطہ} - \text{سر فوطہ})}{(۱ + \text{سر فوطہ}) + (\text{سر فوطہ} + \text{سر فوطہ})}$$

$$= \frac{(1-s) \cdot x - 2 \cdot s \cdot \text{جب ط}}{1 + s + 2 \cdot s \cdot \text{جم ط}}$$

نی $\frac{(1-s) \cdot x - 2 \cdot s \cdot \text{جب ط}}{1 + s + 2 \cdot s \cdot \text{جم ط}} =$
 اگر $s > 1$ ، تو خیالی حصہ مثبت ہے اس لیے دائرہ $|y| > 1$ کا اندازہ
 حصہ اوپر کے نصف حصے کے متناظر ہے۔
 دائرہ $|y| = 1$ کے محیط پر کے کسی نقطہ کے لیے $s = 1$ ، حقیقی
 ہے اس لیے

$$s = \frac{2 \cdot \text{جب ط}}{(1 + \text{جم ط})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \text{جب ط}}{(1 + \text{جم ط})^2}$$

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اوپر کا نصف دائرہ $(0 \leq \text{ط} < \pi)$ حقیقی
 محور کے مثبت آدھے حصے میں اور نیچے کا نصف دائرہ $(\pi < \text{ط} < 2\pi)$ حقیقی
 محور کے منفی آدھے حصے میں بدل جاتا ہے۔
 مثال (۴) اُن تمام دو خطی ابدالوں کو معلوم کرو جس سے y مستوی کا
 دائرہ $|y| \geq 1$ ، s مستوی میں متناظر دائرہ $|s| \geq 1$ میں بدل جاتا ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ مطلوبہ بدل } s = \frac{1 + y}{1 + y} \text{ ہے۔}$$

اب $j \neq 0$ ، ورنہ دونوں مستویوں میں لاقتناہی پر کے نقاط متناظر
 ہوں گے۔

$$s = 0 \text{ اور } s = \infty \text{، } y = \frac{1}{j} \text{ اور } y = -\frac{1}{j} \text{ کے } \frac{1}{j} \text{ کے}$$

متناظر ہیں۔

$$\text{اب فرض کرو کہ } -\frac{1}{j} = s \text{ اور } \frac{1}{j} = s$$

$$\text{تب } s = \frac{1}{j} = \frac{1 - y}{1 - y} \times \frac{1}{j} = \frac{1 - y}{1 - y} \times \frac{1}{j}$$

نقطہ می = ا | ا = ا پر کے ایک نقطہ کے متناظر ہے

$$\text{اور اس لیے } 1 = \left| \frac{1 - \bar{c}}{c} \right| = \left| \frac{1 - \bar{c}}{1 - \bar{c}} \right|$$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طہ حقیقی ہو، تو ا = ج = ج و غطہ اور اس لیے

$$1 = \frac{1 - \bar{c}}{1 - \bar{c}} \text{ و غطہ}$$

$$1 = \frac{1 - \bar{c}}{1 - \bar{c}} \text{ و غطہ}$$

اور یہ مطلوبہ بدل ہے، کیونکہ اگر ی = تو غطہ اور = ب و غطہ، تو

$$1 = \left| \frac{1 - \bar{c}}{1 - \bar{c}} \right| = 1$$

اگر ی = تو غطہ، جہاں $1 > 1$ ، تو

$$1 - \bar{c} = 1 - \bar{c}$$

$$= 1 - \bar{c} = 1 - \bar{c} = 1 - \bar{c} = 1 - \bar{c}$$

$$= (1 - \bar{c})(1 - \bar{c}) > 0$$

یعنی $1 > 1$

دوسرے الفاظ میں دائروں کے اندرونی حصے متناظر ہوتے ہیں۔

مثال (۵) بدل $1 = 1$

$$1 = (1 + \bar{c}) = (1 + \bar{c}) = 1 + \bar{c} = 1 + \bar{c}$$

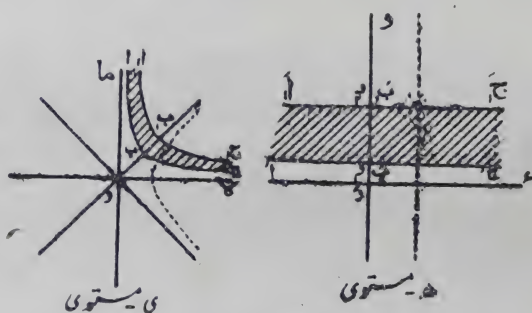
اس لیے $1 = 1$ اور $1 = 1$ لاما (۱)

مساواتوں (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی $1 = 1$ اور $1 = 1$ مستقل

ی مستوی میں قائم زائدوں کے دو نظام ہیں۔

طالب علم اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق کر سکتا ہے کہ ی مستوی میں

زائدوں ۲ لاما = و، ۲ لاما = و سے گھرا ہوا رقبہ، مستوی میں لاقنباہی پٹی سے تعبیر ہوتا ہے۔ جس کو (شکل ۲۵) میں دکھایا گیا ہے۔ اس لیے $u = y$ دو زائدوں کے درمیان رقبہ کو، ایک متوازی پٹی میں بدل دیتا ہے۔



شکل (۲۵)

اگر ب، لامتناہی پر ہو، تو نقطہ ہم بھی لامتناہی پر ہوگا اور زاہد
 ۱۲ ب ج کا اندرونی حصہ خط آ ب ج پر کے اوپر کے نصف مستوی میں
 بدل جاتا ہے۔

ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ بدل \neq ی سے، ی مستوی کے دائرے
ای = ا ج جہاں ا اور ج حقیقی ہیں مستوی میں (Limacons) میں
بدل جاتے ہیں۔

دائرہ می-ا = ج و غلط پر غور کرو (۱)

تب م - ۱ + ۲ ج = ۲ ج (ج جسمه + ۱) و غلظه

اس لیے (ع - ج^۱ + ج^۲) کو مساوی لکھنے سے

یعنے وہ مستوی میں قطب کو $\theta = 90^\circ$ - ج پر لینے سے مساوات (۱) قطبی

مخدووں میں (Limacon)

سر = ۲ ج + ۲ ج 'جم' طہ میں بدل جاتی ہے۔

جب $ل = ج$ ، تو (Limacon) صنوبری ہو جاتا ہے۔

یہ اُس صورت میں واقع ہوتا ہے جبکہ دائرہ $ای$ ۔ $ل = ج$ غلط، و $ما$ کو مبداء پر مس کرتا ہے۔

۳۳۔ ہم شکل تعبیر

فرض کرو کہ ملف متغیروں $ص = (ع + خ و)$ اور $ی = (لا + خ ما)$ کا $ص = ف (ی)$ ایک تحلیلی تفاعل ہے۔ ہم $ی$ کی قیمتوں کو آرگینڈ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں اور اس کے متناظر $ص$ کی قیمتوں کو ایک اور شکل میں ظاہر کرتے ہیں وہ مستوی جس میں $ی$ کی قیمتیں ظاہر کی جاتی ہیں، $ی$ مستوی کہلاتا ہے اور جس میں $ص$ کی قیمتیں درج کی جاتی ہیں $ص$ مستوی کہلاتا ہے۔ کوئی نقطہ جو $ی$ مستوی میں ہوتا ہے، $ی$ کی ایک معین قیمت کے متناظر ہوتا ہے اور اس کے متناظر $ص$ کی ایک معین قیمت حاصل ہوگی کیونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ $ص = ف (ی)$ $ی$ کا ایک قیمتی تفاعل ہے۔

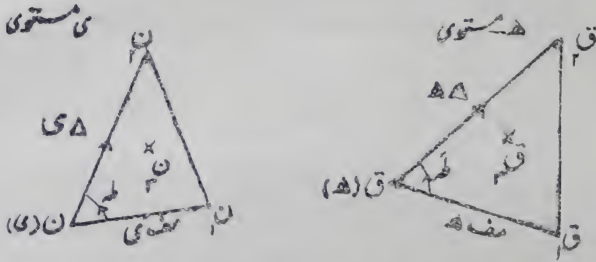
اگر $ی$ مستوی میں نقطن، $ی$ کی ایک قیمت کو ظاہر کرے جس کے لیے تفاعل $ف (ی)$ محدود ہے اور $ا$ اس کا تفرقی سر $ا$ اس نقطہ پر صفر نہیں ہے تو اس نقطن کو سادہ نقطے کہتے ہیں۔

نقطن کی متناظر قیمت $ص$ مستوی میں، ایک نقطہ $ق$ سے تعبیر ہوگی جو مبداء سے محدود فاصلہ پر ہے۔

فرض کرو کہ $ن$ ، اور $ن$ (شکل ۲۶) میں $ن$ کے قریب دوسادہ نقطے $ی + ص$ $ی$ اور $ی + ص$ $ی$ ہیں جن کے متناظر نقطے $ص$ مستوی میں $ق$ اور $ق$ ہیں $ص + ص = ف (ی + ص)$ اور $ص + ص = ف (ی + ص)$ $ی$ ہیں چونکہ $ص$ کا $ی$ کے لحاظ سے یگانہ طور پر تفرقی سر وجود رکھتا ہے

اس لیے $ص$ اور $ص$ دونوں ایک ہی انتہا $ص$ کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ $ن$ ، اور $ن$ صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں۔

اگر n_1 اور n_2 کافی چھوٹے ہوں تو ہم لکھ سکتے ہیں -



شکل (۲۶)

$$\frac{h}{y} = \frac{h}{y}$$

$$\frac{h}{h} = \frac{y}{y} \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{q_2}{q_1} \quad \text{و غلط، جہاں } h \text{ اور } h$$

بالترتیب زاوے n_1 اور q_1 اور q_2 ہیں -

$$\text{اس سے حاصل ہوتا ہے کہ } \frac{n_2}{n_1} = \frac{q_2}{q_1} \quad \text{اور } h = h$$

یعنی مغاری مثلثات n_1 اور q_1 اور q_2 اور h کے اندر کوئی نقطہ n_2 جوہ تو متناظر نقطہ q_2 ایسا ہوگا کہ مثلثات n_1 اور q_1 اور q_2 اور h کے اندر واقع ہوگا۔

رشتہ $h = (y)$ مغاری مثلثات n_1 اور q_1 اور q_2 اور h کے راست قشایہ ہے۔

پہلے مثلث کے اندرونی نقاط، دوسرے مثلث کے اندرونی نقاط کے متناظر ہوتے ہیں۔ ایک نقطہ جو پہلے مثلث کے احاطہ کے گرد مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے ایسے نقطہ میں بدل جاتا ہے جو دوسرے مثلث کے احاطہ کے گرد اسی سمت میں حرکت کرتا ہے۔

وہ مستوی کے نقطہ ق کو مستوی کے نقطہ ن کا متناظر نقطہ کہتے ہیں۔ اب جیسے جیسے نقطہ ن، مستوی میں ایک منحنی س مرتسم کرتا ہے، نقطہ ق جو وہ مستوی میں ن کے متناظر ہے، ایک اور منحنی س مرتسم کرے گا اس منحنی س کو، منحنی س کا متناظر منحنی کہتے ہیں۔

اگر ن میں سے گزرنے والے دو منحنیوں پر جزوی قوسین ن ۱ اور ن ۲ ہوں اور اس کے متناظر نقطہ ق میں سے گزرنے والے دو متناظر منحنیوں پر جزوی قوسین ق ۱ اور ق ۲ ہوں تو ہم نے دیکھا ہے کہ زاویہ ن ۱ ن ۲ اور ق ۱ ق ۲ سمت اور مقدار میں مساوی ہیں۔ یعنی تبدیل شدہ منحنی اسی زاویہ پر قطع کرتے ہیں جس زاویہ پر کے ابتدائی منحنی قطع کرتے ہیں۔ خاص طور پر علی القوائم منحنی، علی القوائم منحنیوں میں بدل جاتے ہیں۔

اگر مستوی میں گ کوئی بند گھیرا ہو، تو وہ مستوی میں اس کے متناظر گ ایک اور بند گھیرا حاصل ہوگا۔

اگر ن اور ون، قیمتوں ی اور ی + مف ی کو ظاہر کریں تو جز ن، مف ی یا فری کو ظاہر کریگا، اسی طرح سے جز ق، جز فرہ کو ظاہر کرے گا۔

$$\text{اب فرہ} = \frac{\text{فری}}{\text{فری}}$$

اس لیے چوٹا جز ق، ن سے لے کر ہم اس کو فری سے

فرہ دیں۔

یہ ضارب (Multiplier) ی مستوی میں نقطہ کے مقام پر منحصر ہوتا ہے اور اس کے طول اور سمت پر منحصر نہیں ہوتا۔

اب اگر ہم $\frac{مرص}{فری} = ف (لا + خ + ما)$ کو شکل ک (جم فہ + خ جب فہ) سے ظاہر کریں تو

جز مرص، متناظر جز فری سے ملے گا اگر ہم اس کے طول کو ک سے

ضرب دیں یعنی $\left| \frac{مرص}{فری} \right|$ سے ضرب دیں اور اس کو زاویہ فہ یعنی دلیل (فری) میں سے گھمائیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ ی مستوی میں رقبہ کا کوئی جز، مستوی میں ایک ایسے جز میں تحویل ہو جاتا ہے جس کی شکل ابتدائی جز کے متشابہ ہے،

خطی ابعاد $\left| \frac{مرص}{فری} \right|$ گنا ہیں۔ رقبی ابعاد $\left| \frac{مرص}{فری} \right|$ گنا ہیں اور اس کی سمت ابتدائی سمت کو زاویہ فہ میں سے گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔

اس بات سے کہ دونوں مستویوں میں متناظر صفاری اجزا

متشابہ ہیں، یہ طریقہ جس سے ہم ایک مستوی کی ایک شکل کو دوسرے

مستوی کے متناظر متشابہ شکل میں لے جاتے ہیں ہم شکل تعبیر

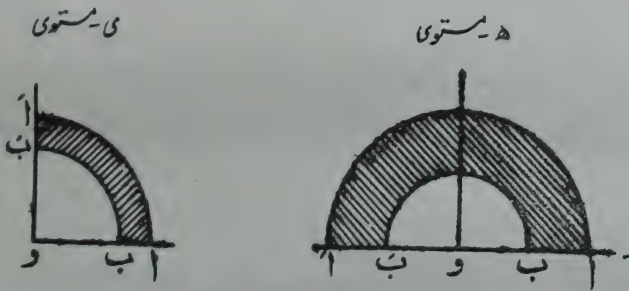
کہلاتا ہے۔

یہ غور سے دیکھا جائے کہ اوپر کی تحقیق صرف سادہ نقطوں کی حد تک محدود ہے۔ اگر نقاط، سادہ نقاط نہ ہوں بلکہ نادر نقاط ہوں تو یہ خاصیت درست نہیں رہتی۔

مثال (۶) بدل مرص = ی سے ی مستوی کے پہلے ربع کا وہ رقبہ جو

دائروں ای = ا، ای = ب اور محوروں سے گھیرا ہے جہاں (ا < ب < ۰) مستوی کے جس رقبہ میں بدل جاتا ہے اُسے معلوم کرو۔

اگر $y = x^2$ ، تو $y = x^2$ یعنی $|x| = \sqrt{y}$ اور دلیل
 $y = x^2$ - ربعی قوسین $|x|$ ، $|y|$ کے نصف قطر بالترتیب $|x|$ اور $|y|$
 ہیں۔ $y = x^2$ مستوی میں نصف دائری قوسوں $|x|$ اور $|y|$ میں بدل جاتے
 ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب $|x|$ اور $|y|$ ہیں۔ خطوط $|x|$ اور $|y|$
 محور کے اس حصہ کے متناظر ہیں جو نقطوں $y = x^2$ اور $y = x^2$ اور
 $y = x^2$ اور $y = x^2$ کے درمیان ہے۔
 شکل (۲۴) میں دو مستویوں کے متناظر نقطوں کو ایک ہی حرف سے



شکل (۲۴)

دکھایا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر تکبیر مساوات $|x| = \sqrt{y}$ سے حاصل ہوتا
 ہے۔ یہ دیے ہوئے رقبہ کے اندر اور اس کے احاطہ پر کے ہر نقاط کے لیے
 محدود ہے اور صفر نہیں ہے۔ اس لیے یہ بدل، ہم شکل تعبیر ہے۔ مثلاً
 دونوں شکلوں میں $|x|$ اور $|y|$ کے زاویے قائمہ ہیں۔ لیکن اگر y
 صفر ہو جائے یعنی $y = 0$ کا رقبہ ربع $|x|$ رہے، تو $y = x^2$ مستوی میں اس کا متناظر
 رقبہ $|x|$ پر کے نصف دائرہ سے تعبیر ہوتا ہے۔ اور یہ بدل تمام نقطوں پر
 سوائے $y = 0$ کے ہم شکل ہے۔ و پر یہ ہم شکل بدل نہیں ہے کیونکہ یہاں پر
 تکبیر صفر کے مساوی ہے۔ دونوں مستویوں میں $y = 0$ کے زاویے مساوی نہیں

ہیں۔ ی مستوی میں و پر کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے لیکن ہ مستوی میں، و پر کا زاویہ π ہے۔ لیکن نقطوں ۱، ۲ پر کے زاویے ابھی قائمہ ہیں۔

مثال (۷) بدل ھ = ی

فرض کرو کہ ھ = (ع + خ و) = ک و غ ف

اور ی = (لا + خ ما) = م و غ ط

تب ک و غ ف = م و غ ن ط

یعنی ک = م اور ف = ن ط

یعنی (ع + خ و) = م (ج م ن ط + خ جب ن ط)

مساواتوں ۷ = م ج م ن ط اور و = م ج م ن ط سے ط یا م کو

ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱) $۷ - ۲ = ۲ = م = (لا + ما) = ن$

اور مس ن ط = $\frac{و}{ف}$ (۲)

مساوات ۱ سے معلوم ہوتا ہے کہ، ی مستوی کے دائرے م = ج، ھ

مستوی کے دائرے ک = ج کے متناظر ہیں۔ دائرہ م = ی = ا پر کے

نقاط، ھ مستوی میں مبدا سے اکائی فاصلہ پر کے نقاط میں بدل جاتے ہیں ی

مستوی میں مبدا سے نکلنے والے خطوط ط = مستقل، ھ مستوی میں متناظر خطوط

ف = مستقل میں بدل جاتے ہیں۔ جس خط کا میلان ی مستوی میں ط ہے،

وہ خط ھ مستوی میں ایسے خط میں بدل جاتا ہے، جس کا میلان ن ط ہے۔

چونکہ ی = ۰، اس بدل کا نادر نقطہ ہے، اس لیے اس نقطہ پر ہم شکل تعبیر

کی خاصیت درست نہیں رہتی۔

مثال (۸) ھ = و

فرض کرو کہ ی = لا + خ ما

اور = ک (جم فہ + خ جب فہ)
 تبک (جم فہ + خ جب فہ) = لا + خ = نو (جم ما + خ جب ما)
 یعنی ک جم فہ = نو جم ما
 اور ک جب فہ = نو جب ما
 اس لیے ک = نو اور فہ = ما

ی مستوی کی متوازی پٹی جو خطوط ما = ما اور ما = ما سے گھیری
 ہوئی ہے، جہاں $|ما - ما| > \pi$ ، مستوی میں فائدہ کی شکل کے رقبہ میں بدل
 جاتی ہے فائدہ کا زاویہ $\pi = \pi - \pi = 0$ ، $|ما - ما| = 0$ ہے۔ ان رقبوں کے
 اندر تمام نقاط پر تعبیر ہم شکل تعبیر ہے کیونکہ اس رقبہ کے اندر کہیں بھی
 فرق صفر نہیں ہے۔

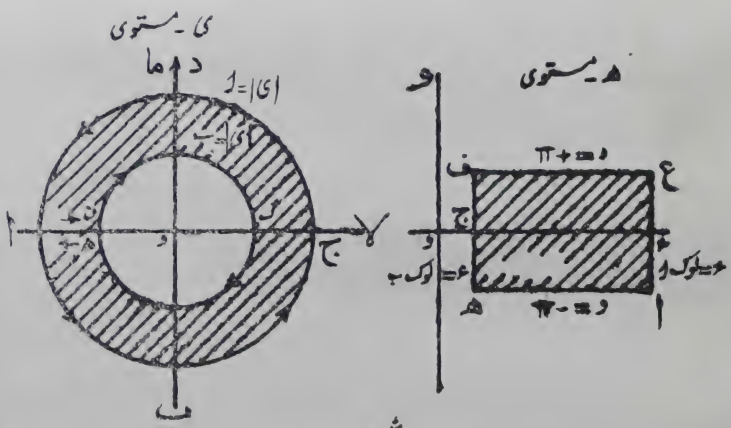
خاص طور پر اگر ما = صفر اور ما = π جس سے $|ما - ما| = \pi$ ، تو
 فائدہ، نصف مستوی ہو جاتا ہے۔ نصف لامتناہی پٹی، $-\infty \leq لا \leq \infty$ صفر،
 $0 \leq ما \leq \pi$ ، مستوی میں اوپر کے نصف حصہ پر اکائی نصف قطر کے
 نصف دائرہ میں بدل جاتی ہے۔
 اگر $|ما - ما| < \pi$ ، تو حاصل شدہ فائدہ، مستوی کو کثیر مرتبہ گھیرتا ہے
 اس صورت میں مزید تحقیق کے لیے رہبان کی سطحوں پر بحث کرنا ہوگا۔

مثال (۹) = لوک ی

اگر ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) تو
 = لوک ر + خ طہ، جہاں ر، ی کا مقیاس اور طہ، ی کے
 دلیل کی صدر قیمت ہے۔
 [لوک ی کثیر قیمت تفاعل ہے۔ ہم نے اس کی وہ شاخ لی ہے جس کے
 لیے $[-\pi < طہ < \pi]$

اگر 'نقطہ ی' = ا سے حرکت کرنا شروع کر کے دائرہ ای = ا، مخالف سمت ساعت میں مرتسم کرے تو مستقل رہتا ہے اور و، مسلسل طور پر - π سے $\pi +$ تک بدلتا ہے، اگر 'ی' اپنی حرکت جاری رکھیں تو جب یہ حقیقی محور کو نقطہ ی = ا پر قطع کرتا ہے، تو طے میں غیر تسلسل ہوتا ہے۔ اس کو دور کرنے کے لیے ہم حقیقی محور کے منفی حصہ کے ساتھ ایک ترجیحی کاٹ لیتے ہیں۔

چونکہ $\frac{1}{\text{قری}} = \frac{1}{\text{ی}}$ ، لوگ ی کے نادر نقطے صرف مبداء اور لا اعتنا ی پر ہیں۔ ترجیحی کاٹ لینے سے حاصل شدہ مستوی کے اُس حصہ میں جو دائروں ای = ا، ای = ا، ای = ب، (ا > ب) کے اندر ہے، لوگ ی ایک قیمتی، محدود اور مسلسل ہے۔



شکل (۲۸)

شکل (۲۸) میں فرض کرو کہ نقطہ 'ی'، دائرہ ا ب ج د ع (ای = ا) اور ترجیحی کاٹ کا اوپر کا حصہ ع ف، دائرہ ف گ ہ (ای = ب) اور ترجیحی کاٹ کا نچلا حصہ ہ ا کے گرد نشان کی سمت میں حروف کے ترتیب کے

لحاظ سے حرکت کرتا ہے۔

جب ی، ا ب ج د ع مرقم کرتا ہے، ہ خط ۷ = لوک ا پر اور ان دونقطوں کے درمیان حرکت کرتا ہے جس کے لیے و کی قیمتیں - π اور $\pi +$ ہیں۔

جب ی، ع سے ف تک حرکت کرتا ہے، تو مستقل ہے اور π کے مساوی ہے، لیکن ۷ کی قیمت لوک ا سے لوک ب تک گھٹتی ہے۔ جب ی، ف گ ھ کے گرد حرکت کرتا ہے تو وہ خط ۷ = لوک ب پر

ان دونقطوں کے درمیان حرکت کرتا ہے جس کے لیے و $\pi =$ آخر کار جب ی، ھ ا کو طے کر کے ا پر پہنچتا ہے، تو مستقل ہوتا ہے اور اس کی قیمت - π ہوتی ہے اور ۷ کی قیمت لوک ب سے لوک ا تک بڑھتی ہے۔

پس ھ مستوی کا مستطیل ا ع ف ھ، جس کے خطوط کی مساواتیں ۷ = لوک ا، ۷ = π ، ۷ = لوک ب اور و = - π ہیں، مستوی کے اندر ای ا = ا اور ای ا = ب سے گھیرے ہوئے رقبہ کے متناظر ہے اور کسی احاطہ کے اندر کا رقبہ دوسرے پر ہم شکل تعبیر کیا گیا ہے۔

اگر و، لامتناہی کی طرف مائل ہو اور ب، صفر کی طرف مائل ہو تو پورا ی - مستوی، ھ مستوی میں خطوط و = π سے گھیرے ہوئے لامتناہی چوڑی پٹی سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب اگر ترجیحی کاٹ کو نکالا جائے اور طہ میں π سے $\pi +$ تک اضافہ کیا جائے، تو پورا ی - مستوی ھ مستوی میں اس پٹی کے متناظر ہے جو خطوط و = π اور و = $\pi +$ کے درمیان ہے۔ اس طرح سے پورے ھ مستوی کو چوڑائی $\pi +$ والے پٹیوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک پر پورا ی مستوی تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگرچہ لوک ی، ی کا کثیر قیمتی تفاعل ہے، تو ی کا ایک قیمتی تفاعل ہے۔

مثال (۱۰) = جمزی

$$(ع + خ د) = جمز (لا + خ ما)$$

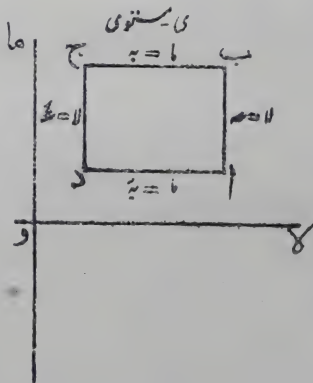
$$= جمز لا جم ما + خ جمز لا جب ما$$

$$اس لیے ع = جمز لا جم ما$$

$$اور و = جمز لا جب ما$$

$$جس سے $1 = \frac{ع}{جمز لا} + \frac{و}{جمز لا}$$$

$$اور $1 = \frac{ع}{جم ما} - \frac{و}{جب ما}$$$



شکل (۲۹)

$$اگر لا مستقل ہو تو وہ کا طریق ناقص $1 = \frac{ع}{جمز لا} + \frac{و}{جمز لا}$ ہے۔$$

$$اگر ما مستقل ہو تو وہ کا طریق زائد $1 = \frac{ع}{جم ما} - \frac{و}{جب ما}$ ہے۔$$

یہ صاف ظاہر ہے کہ لا اور ما کی مختلف قیمتوں کے لیے یہ ہم ماسک نظام ہیں جن کے ماسکے نقاط $\text{ع} = \text{ا}$ پر ہیں۔ ی مستوی کا مستطیل ا ب ج د

{ شکل (۲۹) جس کے اضلاع خطوط $\text{لا} = \text{ع}$ ، $\text{ما} = \text{ب}$ ، $\text{لا} = \text{ع}$ ، $\text{ما} = \text{ب}$ ہیں }

ع مستوی میں تناظر رقبہ ا ب ج د میں ع تناظر ناقصوں اور زائدوں کے درمیان ہے تبدیل ہوتا ہے۔ ع مستوی میں ایسے تو چار رقبے ہیں لیکن ان میں سے صرف ایک مستطیل ا ب ج د کے تناظر ہے۔ دوسرے رقبے مستطیل ا ب ج د کے لا اور ما محوروں میں خیال لینے حاصل ہوتے ہیں۔

بالکل اسی کے مماثل عمل $\text{ع} = \text{جم ی}$ ، $\text{ع} = \text{جب ی}$ کے لیے کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ نمبری (۶)

(۱) اگر ع اور ی دو غلطی بدل $\text{ع} = \frac{\text{ا ی} + \text{ب ج}}{\text{ج ی} + \text{د}}$ سے مربوط ہوں اور اگر نقاط

ع ، ا اور ع بالترتیب نقاط ی ، ا اور ی کے تناظر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ع} - \text{ا}}{\text{ع} - \text{ع}} = \frac{\text{ج ی} + \text{د}}{\text{ج ی} + \text{د}} \times \frac{\text{ی} - \text{ا}}{\text{ی} - \text{ی}}$$

(۲) اگر $\text{ع} = \frac{\text{ا ی} + \text{ب ج}}{\text{ج ی} + \text{د}}$ اور اگر نقطہ ی کا طریق، نقاط ی ، ا اور ی کو لانے

والے وتر پر کے دائرہ کی قوس ہو تو ثابت کرو کہ ع کا طریق نقاط ع ، ا اور ع کو لانے والے وتر پر کے دائرہ کی قوس ہوگی۔

(۳) وہ دو غلطی بدل معلوم کرو جس سے ی مستوی کے تین نقاط ا ، ب ، ج ع مستوی میں بالترتیب نقاط ا ، ع کے تناظر ہوں۔

جواب $\text{ع} = \frac{\text{ی} - \text{ا}}{\text{ی} - \text{ب}} \times \frac{\text{ب ج} - \text{ا د}}{\text{ب ج} - \text{ا د}}$

(۴) ثابت کرو کہ بدل $\frac{1+x}{1+y}$ سے حقیقی محور کا وہ حصہ جو $y=1$ اور

$y=-1$ کے درمیان ہے $y=1$ اور $y=-1$ کو ملانے والے نصف دائرہ میں بدل جاتا ہے۔

(۵) اگر $y=1$ تو ثابت کرو کہ جب y دائرہ $|y|=1$ ج مرسم کرتا ہے تو ہر ایک نقطہ کیسے کا بیضوی (Cassinian ovals) $|y|=1$ ج مرسم کرتا ہے جہاں y اور $y=1$ سے نقاط $y=1$ اور $y=-1$ کے فاصلے ہیں۔

(۶) اگر $y=1$ تو ثابت کرو کہ

(۱) جیسے نقطہ (لا، ما) مثبت سمت ساعت میں دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۱ مرسم کرتا ہے نقطہ (ع، و) منفی سمت ساعت میں دائرہ (۲-ع)^۲ + (۱-و)^۲ = ۲۵ مرسم کرتا ہے۔

(۲) جیسے نقطہ (لا، ما) مثبت سمت ساعت میں دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۳۷-۱۲-۱۲-۱۲ مرسم کرتا ہے نقطہ (ع، و) منفی سمت ساعت میں دائرہ

$$(۲۵-\frac{۱۳}{۱۲})^۲ = (\frac{۱۳}{۱۲}-۱)^۲ + (\frac{۱}{۲}-۱)^۲$$

(۷) بدل $y=1$ سے $y=1$ کے ذریعہ

(۱) نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے خطوں کے نظام اور (۲) اس نقطہ کو مرکز مان کر کھینچے ہوئے دائروں کے نظام کے متناظر منحنی معلوم کرو۔ اور دکھاؤ کہ پہلی صورت میں $y=1$ اور $y=-1$ میں سے گزرنے والے ہم محور دائروں کا نظام حاصل ہوتا ہے اور دوسری میں ایسے ہم محور دائروں کے نظام حاصل ہوتے ہیں جن کے $y=1$ اور $y=-1$ انتہائی نقاط ہیں۔

(۸) ثابت کرو کہ بدل $y=1$ سے دائرہ $|y|=1$ مکافی و $y=1$ اور $y=-1$ میں

بدل جاتا ہے اور دائرہ کا اندرونی حصہ مکانی کے بیرونی حصہ کے متناظر ہے۔

$$(9) \text{ اگر } \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \text{ اور نقطہ } y \text{، خط } m = 3 (2-1) \text{ کا وہ حصہ ترسم کرے جو}$$

پہلے ربع میں ہو تو وہ کا راستہ معلوم کرو۔ اسی شکل میں وہ کا راستہ دکھاؤ جبکہ y خط $m = 3 + 2 (2-1) = 5$ صفر کا وہ حصہ ترسم کرے جو چوتھے ربع میں ہے۔ ہر ایک صورت میں حرکت کی سمت معلوم کرو۔

جواب۔ دائرہ $6 + 6 = 12$ و $3 + 3 = 6$ کے وہ حصے جو بالترتیب چوتھے اور پہلے ربع میں ہیں۔

$$(10) \text{ دکھاؤ کہ بدل } \frac{(2+y)}{(3-y)} \text{ سے دائرہ } 1 + 2 = 3 \text{ صفر۔}$$

خط $3 + 6 = 9$ صفر میں بدل جاتا ہے اور اس کی تشریح کرو کہ حاصل شدہ معنی کس وجہ سے دائرہ نہیں ہے۔

(11) ہم شکل تعبیر کی اہم خصوصیات کو بیان کرو۔

$$(12) \text{ اگر } \left\{ \frac{y-6}{y+6} \right\} \text{ جہاں } y \text{ حقیقی اور مثبت ہے، تو } y \text{ مستوی کے وہ}$$

رقبے معلوم کرو جو مستوی کے اوپر کے نصف کے ہم شکل تعبیر ہوتے ہیں۔
جواب (۱) دائرہ $|y| = 6$ کا بچلا آدھا حصہ (۲) لا محدود کے اوپر مستوی کا وہ حصہ جو دائرہ $|y| = 6$ کے باہر ہے۔

$$(13) \text{ اگر } \frac{y}{x} = 1 \text{، تو ثابت کرو کہ } y \text{ مستوی کا لائق ہی مستطیل}$$

جو $0 = 1$ ، $1 = 1$ ، $2 = 2$ ، $3 = 3$ سے گھرا ہوا ہے وہ مستوی کے ایک ربع میں ہم شکل تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

$$(14) \text{ اگر } \frac{y}{x} = 2 \text{، تو ثابت کرو کہ } y \text{ مستوی میں خط } 2 = 1 \text{، } 2 = 2 \text{، } 2 = 3 \text{ سے}$$

گھرا ہوا خطہ مستوی میں ایسے خط میں تحویل ہو جاتا ہے جس کا رقبہ $\frac{1}{2} (2-1) = \frac{1}{2}$ ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ رشتہ $\infty = \infty$ جب ∞ سے ∞ مستوی کا نیم لاقناری (Semi-

infinite) مستطیل 'لا' ∞ ، $\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$ ، مستوی کے اوپر

کے نصف حصہ سے تعبیر ہوتا ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ اگر $\infty = \infty + \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$

تو دائرہ 'لا' + 'لا' = 'لا'، کا اندرونی حصہ، مستوی میں ناقص کے اندرونی حصہ میں بدل جاتا ہے لیکن یہ بدل ہم شکل بدل نہیں ہے۔

(۱۷) اگر $\infty = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ تو $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ کے قناری مستوی کے معنی معلوم کرو

(۱۸) ثابت کرو کہ بدل $\infty = \frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ مستوی کا ایک مساوی الزاویہ لولبی

(Equiangular Spiral) مستوی میں ایک نقطہ کے متناظر ہوتا ہے۔

(۱۹) اگر ج، حقیقی ہو تو دکھاؤ کہ بدل $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ مستوی کی پٹی

جو $\infty = \infty$ ، $\infty = \infty$ ، $\infty = \infty$ اور $\infty = \infty$ سے گھیری ہوئی

ہے، مستوی میں دائرہ ای \geq ج میں ہم شکل بدل جاتی ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ رشتہ $\infty = \infty + \frac{\pi}{2}$ سے خطوط 'لا' = مستقل، مستوی میں

(Lemniscates) میں بدل جاتی ہے۔

(۲۱) اگر $\infty = \infty + \frac{\pi}{2}$ ، تو ثابت کرو کہ مکانی 'لا' = 'لا' + 'لا' کا اندرونی

حصہ بدل $\infty = \infty$ جب $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ سے مستوی کے اوپر کے حصہ میں

بدل جاتا ہے۔

(۲۲) ثابت کرو کہ بدل $\infty = \infty + \frac{\pi}{2}$ سے مستوی کے دائرہ ای \geq ج

اندرونی حصہ، مستوی میں مکانی ۲ (۱-جم ذ) = ۱ کے بیرونی حصہ میں

بدل جاتا ہے جہاں π ، فہ مستوی کے اندر کسی نقطہ کے قطبی متحد ہیں۔

$$(۲۳) \text{ ثابت کرو کہ بدل } \infty = \left(\frac{y + \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} \right)^2 \text{ سے } y \text{ مستوی کا حقیقی محور، } \infty \text{ مستوی}$$

یہ منوہری میں بدل جاتا ہے۔ y مستوی کا وہ حصہ معلوم کرو جو منوہری کے اندرونی حصہ کے متناظر ہے۔

$$(۲۴) \text{ بدل } y^2 = \infty + \frac{1}{\infty} \text{ پر غور کرو۔}$$

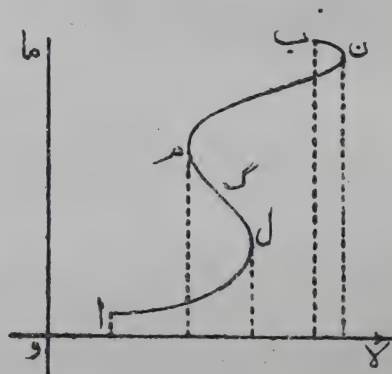
————— منوہری —————

ملفوظ مکمل اور کوشی کا مسئلہ

ملفوظ متغیروں کے تفاعلوں کے محدود کلمہ کی تعریف منحنی مکملوں کی مدد سے کی جاتی ہے اس لیے ہم پہلے منحنی کلمہ کی تعریف دیں گے۔

۳۳ - منحنی تکمله —

مستوی (لا، م) میں دو نقطوں | اور ب کو ملانے والے منحنی گ پر
غور کرو (شکل ۳۰) اس منحنی کو مقطوعوں | ل، ل' م، م' ہن میں



نسخہ (۳۰)

اس طرح تقسیم کرو کہ ان میں سے ہر مقطوعہ کے لیے، لا کی ایک قیمت کے جواب میں ما کی صرف ایک قیمت حاصل ہو اور اس طرح ہر مقطوعہ میں ما، لا کا ایک قیمتی مسلسل تفاعل ہو، ان تفاعلوں کو فم (لا، فم، لا)، فم (لا، فم، لا)، فم (لا، فم، لا) سے ظاہر کرو اب فرض کرو کہ ف (لا، ما) مستوی کے اُس خطہ کے اندر جس میں راستہ گ ہے لا اور ما کا ایک قیمتی تفاعل ہے۔

تب تفاعل ف {لا، فم، لا}، ف {لا، فم، لا}، ف {لا، فم، لا}
بالترتیب قوسوں ال، ل، م، ن پر لا کے یک قیمتی مسلسل تفاعل ہیں اور تکملے

ک {لا، فم، لا}، ک {لا، فم، لا}، ک {لا، فم، لا}
جہاں ال، م، ن ب، وغیرہ، ل، م، ن ب کے معین ہیں سادے محدود تکملے ہیں۔ یہ منحنی تکملے ہیں۔

ک {لا، ما، فرلا، ک {لا، ما، فرلا، ک {لا، ما، فرلا
ال م ن
اور ان کا مجموعہ منحنی تکملہ ک {لا، ما، فرلا ہے

اسی طرح سے گ کو متعدد مقطوعوں میں تقسیم کرنے سے جن میں سے ہر ایک میں لا، ما کا ایک قیمتی تفاعل ہے۔ ہم منحنی تکملہ ک {لا، ما، فرما کی تقریب

کر سکتے ہیں۔ ان کو ملانے سے ایک تیسری قسم کا منحنی تکملہ

ک {لا، ما، فرلا + ک {لا، ما، فرما} حاصل ہوتا ہے۔

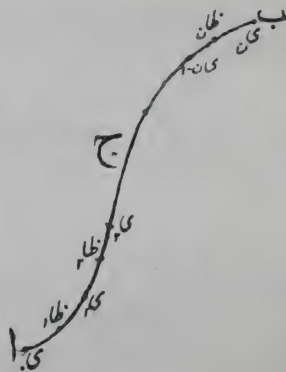
نتیجہ صریح ۱۔ اگر لا اور ما تبدیل ت کے یک قیمتی تفاعل ہوں تو مکمل ہو جاتا ہے۔

$$\int \left\{ \frac{f}{(لا، ما)} + \frac{س}{(لا، ما)} \right\} \frac{مرتا}{مرت} =$$

جہاں ت اور ت، گ کے ابتدائی اور آخری نقطوں کے مناظر ہیں۔
نتیجہ صریح ۲۔ اگر گ بند منحنی ہو تو، مکمل کی قیمت ابتدائی نقطہ کے مقام پر منحصر نہیں ہوتی لیکن اس کی علامت منحنی کی مرتسم شدہ سمت پر منحصر ہوتی ہے۔

۳۵۔ ملف متغیر کا محدود تکملہ

فرض کرو کہ $f(y) = (e + x)$ ، ملف متغیری $= (لا + x)$ کا
ایک قیمتی مسلسل تفاعل ہے۔ نیز فرض کرو کہ جس خطہ کے اندر $f(y)$ ایک قیمتی
اور مسلسل ہے، اُس کے اندر نقاط y اور x کو ملانے والا منحنی $اج ب$
(شکل ۳۱) ہے۔



شکل (۳۱)

س کی اس انتہائی قیمت کو ف (ی) کا معنی ا ج ب کے گرد لیا جوا
تکملہ کہتے ہیں اور اس کو لکھتے ہیں -

$$\oint_C f(y) dy$$

ا ج ب

معنی ا ج ب کو تکل کا راستہ کہتے ہیں -

اگر تکل کا راستہ ایک بند معنی گ ہو تو تکملہ کو گھیرا تکملہ
(Contour integral) کہتے ہیں -

گھیرے تکملہ کی بعض مشہور خاصیتیں - ان کو گھیرے تکملہ کے
تعریف کی مدد سے ثابت کیا جاسکتا ہے -

$$(1) \oint_C f(y) dy = - \oint_C f(y) dy$$

ا ج ب

ب ج ا

$$(2) \oint_C f(y) dy = \oint_C f(y) dy + \oint_C f(y) dy$$

ا ج ب

ب ج ا

ا ج ب

$$(3) \oint_C \{f_1(y) + f_2(y) + \dots + f_n(y)\} dy$$

ا ج ب

$$= \oint_C f_1(y) dy + \oint_C f_2(y) dy + \dots + \oint_C f_n(y) dy$$

ا ج ب

ا ج ب

ا ج ب

ا ج ب

$$(4) \oint_C f(y) dy = \oint_C f(y) dy$$

ا ج ب

دوہرے تکرار (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما پر غور کرو جو گ

سے گھیرے ہوئے سادہ طور پر ملے ہوئے خطہ پر لیا گیا ہے۔

اولاً فرض کرو کہ گ (شکل ۲۲) ایک ایسا منحنی ہے کہ کسی محور کے متوازی کوئی خط اس کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ فرض کرو کہ لا کی کسی قیمت کے جواب میں منحنی گ پر ما کی دو قیمتیں ما اور ما (ما، ما) ہیں اور ۱ اور ب منحنی گ پر اقل اور اعظم فصلے لا اور لا والے نقطے ہیں۔ تب

۔ (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما = (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما { (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما }

آخری جملہ دو منحنی تکراروں (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما، (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما کا مجموعہ ہے

اقب افب

اور اس لیے چونکہ (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما = (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما

اقب بقا

اس لیے (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما = (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما

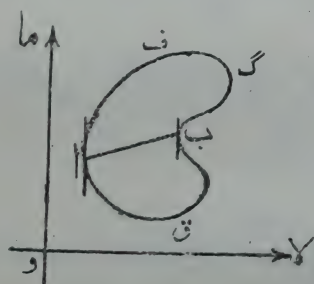
جہاں تکرار پر مثبت سمت ساعت میں لیا گیا ہے۔

اسی طرح سے (۔ جف ق + جف ف) مرلا مرما = (۔ جف ق + جف ف) مرلا مرما

اس لیے گرین کا مسئلہ (۔ جف ف + جف ق) مرلا مرما = (۔ جف ق + جف ف) مرلا مرما

خطہ زیر بحث کے لیے درست ہے۔

یہ مسئلہ دوہرے تکملہ اور منحنی تکملہ میں اہم رشتہ کو بیان کرتا ہے۔
پھر فرض کرو کہ اگر گ اس شرط کو پورا نہ کرے کہ کسی محور کے متوازی
کوئی خط اس کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرتا تو اس خطہ کو ایسے خطوں
میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک اس شرط کو پورا کرتا ہے۔ مثلاً
شکل (۳۳) میں اگر نقاط ۱ اور ۲ کو جن پر کے مماس ما محور کے متوازی
ہیں، ایک خط کے ذریعہ ملایا جائے تو اس طرح سے جو دو رقبے حاصل
ہوتے ہیں وہ مطلوبہ خطے ہیں۔



شکل (۳۳)

اس لیے کہ $(- \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}})$ ملا مرا

$$= (\text{ف ملا ق مرا}) + (\text{ف ملا لا ق مرا})$$

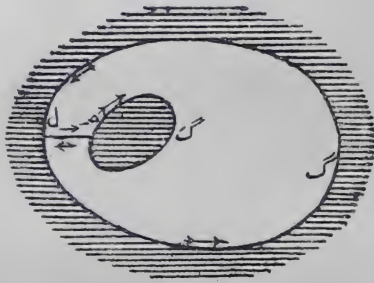
$$\text{اق ب ۱} \quad \text{اب ف ۱}$$

$= (\text{ف ملا ق مرا})$ ، چونکہ ۱ اب اور ب ۱ پر لیے گئے تکملوں کا
مجموعہ صفر ہے۔

اسی طرح سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ مسئلہ سادہ طور پر طے ہوئے

تمام خطوں کے لیے جو بند منحنیوں سے محدود ہیں، درست ہے۔

ضعفی طور پر ملے ہوئے خطے — منحنیوں گ اور گ
 { شکل (۳۴) } کے درمیانی خطوں پر غور کرو۔ اس خطہ کو گ سے گ تک
 خط ل م کھینچنے سے سادہ لچر پر ملا ہوا خطہ بنایا جاسکتا ہے۔



شکل (۳۴)

اس لیے کہ $(-جف ف + جف ق) = (ف ملا ق + ق ملا) + (ف ملا ق + ق ملا)$
 ل م

$(-ف ملا ق + ق ملا) + (ف ملا ق + ق ملا)$
 گ م

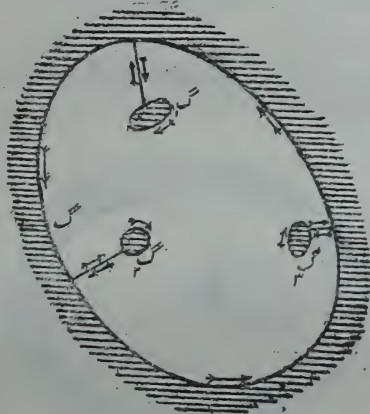
$(ف ملا ق + ق ملا) - (ف ملا ق + ق ملا)$
 گ

جہاں دوسرے تکملہ کو گ کے گرد مثبت سمت ساعت میں لیا گیا ہے۔

اسی طرح سے اُس خطہ کے لیے جو منحنی گ (شکل ۳۵) اور ن منحنیوں

گ، گ، گ، گ کے درمیان ہے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} \right) \text{ولا مرا} = \left(\text{ف ولا ق مرا} \right) - \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} \right) \text{ولا مرا}$$



شکل (۳۵)

مثال (۱) اگر ف ولا + ق مرا، کامل تفرقہ ہو تو ثابت کرو کہ

$\left(\text{ف ولا} + \text{ق مرا} \right) = \text{صفر}$ جہاں گ بند منحنی ہے۔

چونکہ ف ولا + ق مرا کامل تفرقہ ہے اس لیے $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}$

گرین کے مسئلہ سے $\left(\text{ف ولا} + \text{ق مرا} \right) = \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} \right) \text{ولا مرا}$

$= \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} \right) \text{ولا مرا} = \text{صفر}$

۳۴۔ کوشی کا تکمیلی مسئلہ

اگر تفاعل ف (ی) سادہ طور پر ملے ہوئے خطے ۱ میں تحلیل ہو اور
 گ ایک بند گیر ہو جو با تمام ۱ میں واقع ہو تو ف (ی) مری = صفر
 فرض کرو کہ ف (ی) = (۶ + خ و)

$$\text{تب } \text{ف (ی) مری} = \text{ف (۶ + خ و)} (\text{فرلا} + \text{خ و})$$

$$= \text{ف (۶ فرلا - فرلا و مری)} + \text{خ و (فرلا و مری + ۶ فرلا)}$$

$$\text{اگر بن کے مسئلہ سے } \text{ف (ی) مری} = \text{ف (۶ فرلا - فرلا و مری)} + \text{خ و (فرلا و مری + ۶ فرلا)}$$

اب چونکہ ف (ی) تحلیل ہے اس لیے کوشی ریمان مساواتوں کی رو سے

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \text{ اور } \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = - \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

ان قیمتوں کو اوپر کے دوہرے تکملہ میں درج کرنے سے

$$\text{ف (ی) مری} = \text{ف (۶ فرلا - فرلا و مری)} + \text{خ و (فرلا و مری + ۶ فرلا)}$$

= صفر

مثال (۲) تکملہ ف (ی) مری سے جہاں گ، دائرہ | ی | = ۱ کو تعبیر کرتا

ہے اخذ کرو کہ

$$\text{ف (۲ + ۱ جم طہ / ۲ + ۵ جم طہ)} = \text{صفر}$$

تفاعل $\frac{1}{2+Y}$ کا صرف ایک قطب نقطہ $Y = -2$ پر ہے اور یہ

نقطہ دائرہ $|Y| = 1$ کے باہر ہے اس لیے گھیرا $|Y| = 1$ کے اندر دیا ہوا
تفاعل تحلیل ہے اس لیے کوئی کے مسئلہ سے۔

$$\int \frac{Y}{2+Y} = \text{صفر}$$

دوسرے حصے کے لیے درج کردی = $\frac{Y}{2+Y}$ جہاں $Y = 1$ اور $Y = -2$
صفر سے $2+Y$ تک بدلنا ہے۔

تب $Y = 1$ مری = $\frac{Y}{2+Y}$ و $Y = -2$ و $Y = 1$

$$\text{اس لیے } \int \frac{Y}{2+Y} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{2+Y} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)(2+Y)} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{Y}{(2+Y)^2}$$

$$\text{لیکن } \int \frac{f(x)}{x^2+1} = \text{صفر، اس لیے } \int \frac{(2+1)x^2 - 2}{x^2+5} = \text{صفر}$$

اس تکرار کے خیالی حصہ کو دونوں طرف مساوی رکھنے سے

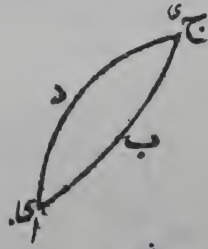
$$\text{صفر} = \int \frac{(2+1)x^2}{x^2+5}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ اگر $f(x) = (2-x)$ = $f(x)$ تو
 $\int f(x) = \int (2-x) = 2x - \frac{x^2}{2}$

$$\text{اس لیے } \int \frac{(2+1)x^2}{x^2+5} = 2 \int \frac{(2+1)x^2}{x^2+5} = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی } \int \frac{(2+1)x^2}{x^2+5} = \text{صفر}$$

حسب ذیل مسئلے کوشی کے مسئلہ کی مدد سے فوراً حاصل کیے جاسکتے ہیں۔
 مسئلہ (۱) فرض کرو کہ $f(x)$ سادہ طور پر ملے ہوئے نقطہ میں تحلیل ہوا اور
 فرض کرو کہ y اور x کو ملانے والے راستے AB (شکل ۳۶) اور



شکل (۳۶)

۱۵ ج بالتمام اس خطہ کے اندر واقع ہیں - تب

کف (ی) مری + کف (ی) مری = صفر
اب ج ۱۵ ج

اس لیے کف (ی) مری = کف (ی) مری
اب ج ۱۵ ج

اس لیے تکملہ راستہ پر منحصر نہیں ہے جب تک کہ راستہ بالتمام
اس خطہ کے اندر ہے بلکہ سمت پر منحصر ہے۔

مسئلہ (۲) فرض کرو کہ ف (ی) منحنی گ اور گ (شکل ۳۳) سے

گیرے ہوئے ملحقہ نما فضا میں تحلیل ہے۔

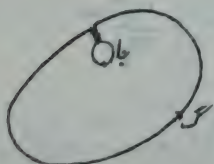
تب کف (ی) مری = کف (ی) مری
گ

جبکہ دونوں صورتوں میں تکمیل کا عمل ایک ہی سمت میں کیا گیا ہے۔
کیونکہ کوشی کے مسئلہ سے

کف (ی) مری + کف (ی) مری - کف (ی) مری + کف (ی) مری = صفر
ل م گ م

لیکن کف (ی) مری = کف (ی) مری
ل م

نقطہ ی = ظا کے گرد ایک چھوٹا دائرہ (شکل ۳۴) جا جس کا نصف قطر
 نہ ہو، گھیراگ کے اندر کھینچو جو بالتمام اس گھیرے کے اندر ہو۔ خطوں گ اور
 جا کے درمیانی رقبہ میں تفاعل فہ (ی) = $\frac{ف(ی)}{ی - ظا}$ تحلیل ہے۔



شکل (۳۴)

جا پر کے کسی نقطہ کو، گ پر کے کسی نقطہ سے ملانے سے ہم ایک
 ترچی کاٹ لیتے ہیں۔ اس طرح سے ہم کو ایک بند گھیرا 'گا' ملتا ہے
 جس کے اندر فہ (ی) تحلیل ہے۔ تب کوشی کے مسئلہ سے

$$\int_{گا} فہ (ی) فری = صفر$$

نیز گا کے گرد مخالف سمت ساعت میں چکر لگانے سے، ترچی کاٹ پر
 سے دو دفعہ گزرنے پڑتا ہے۔ ہر ایک صورت میں گزرنے کی سمت مخالف
 ہے اس لیے اس پر لیا ہوا مکملہ صفر کے مساوی ہے اور ہمیں حاصل
 ہوتا ہے۔

$$\int_{جا} فہ (ی) فری - \int_{گ} فہ (ی) فری = صفر$$

$$\text{اب } \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{فہ (ی) مری} = \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{ف (ی) مری}$$

$$= \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{ف (ظا) مری} + \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{فہ (ی) مری} - \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{فہ (ظا) مری} \quad (۱)$$

اب جا پر ' (ی - ظا) = لہ و غلہ

$$\text{اس لیے } \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{فہ (ظا) مری} = \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{ف (ظا) مری}$$

$$= \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{ف (ظا) مری} = \frac{\text{ف (ظا) مری}}{\pi^2} \times \pi^2 = \text{ف (ظا) مری}$$

$$\text{نیز دوسری رقم } \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{ف (ی) مری} - \int_{\text{جا}}^{\frac{1}{\pi^2}} \text{ف (ظا) مری}$$

$$\frac{1}{\pi^2} \text{ اعظم } | \text{ف (ی) مری} - \text{ف (ظا) مری} | \text{ لہ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔}$$

اب چونکہ ی = ظا پر ' ف (ی) مسلسل ہے اس لیے یہ جملہ صفر کی طرفائل ہوتا ہے جبکہ لہ صفر جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

یعنی کوشی کے مسئلہ کی مدد سے ہم ایک جند گھیرے کے اندر کسی نقطہ پر تفاعل ف (ی) کی قیمت کو جس کے اندر تفاعل ف (ی) تحلیللی ہے اُس گھیرے کے گرد لیے ہوئے ایک تکرار کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ (۵) اگر ف (ی) ایک علاقہ > میں تحلیللی ہو، اور > کے اندر

اگر کوئی بند مخرجی ہو جو نقطہ ی = ظا کو گھیرتا ہے تو ف (ی) کا تفرقی سر نقطہ ظا پر -

$$ف (ظا) = \frac{1}{\int \chi \pi^2} \int \frac{ف (ی) فری}{(ی - ظا)^2} سے ملتا ہے۔$$

$$\text{مسئلہ (۴) سے} \quad ف (ظا + \omega) - ف (ظا) = \frac{1}{\omega} \int \chi \pi^2 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{ی - ظا} - \frac{1}{ی - ظا} \right) ف (ی) فری$$

$$= \int \chi \pi^2 \left\{ \frac{ف (ی) فری}{(ی - ظا)^2} + \frac{ف (ی)}{(ی - ظا)^2} \right\} فری$$

$$= \int \chi \pi^2 \frac{ف (ی) فری}{(ی - ظا)^2} + ع$$

اب اگر یہ ثابت کیا جائے کہ |ع| -> 0 جبکہ \omega -> 0 تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ ف (ی) گھیراگ پر اور اس کے اندر تحلیل ہے اس لیے یہ محدود ہے۔ فرض کرو کہ اس کی علوی حد ہر ہے۔

تب |ف (ی)| \geq \omega گھیراگ پر
فرض کرو کہ گھیراگ سے نقطہ ظا تک کے فاصلہ کی سفلی حد ج ہے۔
فرض کرو کہ ہ کو ہم اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ |ہ| > \frac{1}{J}

تب |ع| > \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{J} \times \frac{1}{J} جہاں ل گھیراگ کا طول ہے۔

اور یہ ظاہر ہے کہ |ع| -> 0 جبکہ \omega -> 0 پس ثابت ہوا کہ

$$ف (ظا) = \frac{1}{\int \chi \pi^2} \int \frac{ف (ی) فری}{(ی - ظا)^2}$$

مسئلہ (۶) اگر ف (ی) علاقہ د میں تحلیل ہو، تو علاقہ د کے ہر نقطہ

نظا پرف (ی) کے تمام رتبہ کے تفرقی سے وجود رکھتے ہیں جن کی قیمتیں مساوات

$$f^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt \quad \text{سے ملتی ہیں، جہاں } f^{(n)}(x) \text{ کے}$$

ن ویں رتبہ کے تفرقی سے کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ یہ مسئلہ $n = m$ کے لیے درست ہے تو جملہ

$$f^{(m)}(x) = \frac{f^{(m)}(y)}{m!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1-t)^m} dt \quad \text{پر غور کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ ثابت}$$

$$\text{کر سکتے ہیں کہ یہ جملہ } \frac{f^{(m)}(y)}{m!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1-t)^m} dt + \frac{f^{(m)}(y)}{m!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(1-t)^m} dt \text{ کے مساوی ہے۔}$$

مسئلہ (۴) کی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $|x| \leq |y|$ میں یہ صفر ہوتا ہے جبکہ $|x| = |y|$ میں یہ صفر ہے۔ طالب علم بطور مشق کے اس کو خود کرے۔

مسئلہ (۵) ٹیلر کا مسئلہ (Taylor's theorem)

اگر $f(y)$ دائرہ $|x| \leq |y|$ میں تحلیل ہو اور نظا ایک ایسا نقطہ ہو کہ $|x| = |y|$ (۵) $|x| = |y|$

$$f^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt \quad \text{جہاں } f^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt$$

فرض کرو کہ گ، مرکز $y = 0$ اور نصف قطر r والا دائرہ ہے، جہاں

$$r > |x| > |y|$$

حسب ذیل مساوات متماثلہ پر غور کرو۔

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-y} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt + \frac{1}{1-y} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt + \dots + \frac{1}{1-y} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt + \frac{1}{1-y} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt$$

ہر ایک رقم کو $f^{(n)}(y)$ سے ضرب دو اور گ کے گرد تکمل کرو۔

نقطہ ی = ا پر ہوا اور اگر

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{f(y)}{y} dy$$

کی کوئی قیمت ہو تو، اس قیمت کو ف (ی) کا نقطہ ی = ا پر باقی کہتے ہیں۔

لائتناہی پر باقی —

اگر ف (ی) کی ایک جداگانہ نادریت لائتناہی پر ہوا اور گ ایک ایسا بڑا دائرہ ہو جو لائتناہی کے سوائے ف (ی) کے تمام نادر نقطوں کو گھیرے تو ف (ی) کے لائتناہی پر کے باقی کی تعریف مکملہ

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{f(y)}{y} dy$$

قیمت ہو۔

جہاں تکملہ گ کے گرد منفی سمت میں (مبداء کے لحاظ سے) لیا گیا ہے۔ اگر اس تکملہ پر بدل ی = $\frac{1}{\pi}$ کا اطلاق کیا جائے تو یہ ہو جاتا ہے۔

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{f(y)}{y} dy - f\left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{1}{\pi}$$

جہاں تکملہ کو مبداء کے گرد ایک چھوٹے دائرہ پر مثبت سمت میں لیا گیا ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر

$$\left\{ \frac{f(y)}{y} - f\left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{1}{\pi} \right\} \text{ یا } \left\{ f(y) - f\left(\frac{1}{\pi}\right) \right\}$$

قیمت ہو تو یہ قیمت ف (ی) کی لائتناہی پر باقی ہے۔

اب ہم ف (ی) کی ی = ا پر باقی معلوم کرتے ہیں جبکہ ی = ا کا پہلے رتبہ کا قطب ہو۔ اگر یہ نادریت کا قطب ہو تو اس پر باقی

کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

مثال (۳) ثابت کرو کہ اگر $f(y) = 1$ پر تحلیل ہو تو $\frac{f(y)}{1-y}$ کا

باقی 1 پر $f(1)$ ہے

$$\text{چونکہ } \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = f(1)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{f(x)-1}{1-x} dx$$

$$= f(1) + \int_0^1 \frac{f(x)-1}{1-x} dx$$

$$= f(1) + \int_0^1 \frac{f(x)-1}{1-x} dx$$

اب g کو اتنا چھوٹا کر کہ اس کے تمام نقاط کے لیے $|g| < \epsilon$ - تب

$$\left| \int_0^1 \frac{f(x)-1}{1-x} dx - f(1) \right| < \epsilon$$

جہاں ϵ کا ہول ہے۔

$$\text{اس لیے } \int_0^1 \frac{f(x)-1}{1-x} dx = f(1)$$

مثال (۲) سے حاصل شدہ نتیجہ کو ہم ذیل کے مسئلہ کے طور پر بیان

کر سکتے ہیں۔

مسئلہ - اگر $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (ی۔ ا۔ ف) { ایک معین عدد ہو }
تو (ی) کا $\frac{1}{a}$ پر باقی ۱ ہوتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ مسئلہ صرف اسی صورت کے لیے درست ہے جبکہ $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (ی) کا سادہ یعنی پہلے رتبہ کا قطب ہو۔
مثال (۴) (ی۔ ا۔ ف) کا باقی ۱ پر اکائی ہے۔

$$\text{کیونکہ } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

اوپر کے مسئلہ سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر (ی) اور (ب) (ی) کے کثیر المارتھا
جملے ہوں اور اگر (ی۔ ا۔ ف) (ی) کا تکرار نہ پانے والا جزو ضروری ہو تو

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (2)$$

مثال (۵) ثابت کر دو کہ $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (ی۔ ا۔ ف) کے باقی ۱ اور ب پر
 $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ اور $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (ی۔ ا۔ ف) ہیں۔

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (3)$$

ہیں اس لیے ان پر باقی نہیں (ی۔ ا۔ ف) (ی۔ ا۔ ف) (ی۔ ا۔ ف)

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (4)$$

اسی طرح سے ی = ب پر باقی نکالی جاسکتی ہے۔

ب پر باقی اوپر کے نتیجہ سے $\frac{ف(ب)}{س(ب)}$ سے بھی حاصل ہوتی ہے۔

$$= \frac{ف(ب) + ق(ب) + ی}{ب} = \frac{ف(ب) + ق(ب) + ی}{ب}$$

$$= \frac{ف(ب) + ق(ب) + ی}{ب} = \frac{ف(ب) + ق(ب) + ی}{ب}$$

مسئلہ - اگر ایک قیمت تفاعل کے محدود نادر نقطے ہوں تو ان نادر نقطوں پر باقیوں کا مجموعہ بشمول لا متناہی پر کے باقی کے صفر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ گ ایک بند گھیرا ہے جس کے اندر سوائے لا متناہی کے تمام

نادر نقطے واقع ہیں۔ تب ان نادر نقطوں پر باقیوں کا مجموعہ $\int \frac{1}{x} dx$ (ی) مری ہوتا ہے۔

لیکن لا متناہی پر کا باقی ہے۔ $\int \frac{1}{x} dx$ (ی) مری

اس لیے باقیوں کا مجموعہ صفر ہے۔

مثال (۶) $\frac{ی}{(۱-ی)(۲-ی)(۳-ی)}$ کے باقی ۱، ۲، ۳ اور لا متناہی

پر معلوم کرو اعداد ثابت کرو کہ ان کا مجموعہ صفر ہے۔

ی = ۱، ۲، ۳ اور اس تفاعل کے سادہ قطب ہیں اس لیے۔

$$= ی = ۱ پر باقی = \frac{ی(۱-ی)}{(۱-ی)(۲-ی)(۳-ی)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 1} =$$

$$y = 2 \text{ پر باقی} = \frac{y^2 (y-2)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} =$$

$$2 = \frac{2}{1 \times 1} =$$

$$y = 3 \text{ پر باقی} = \frac{y^2 (y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} =$$

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{1 \times 2} =$$

$$\text{لاگتا ہی پر باقی} = \frac{y^2 (y-1)(y-2)(y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} =$$

$$= \frac{y^2}{y(y-1)(y-2)(y-3)} =$$

$$= \frac{y^2}{y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 10y + 1} =$$

$$= \frac{1}{y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 10y + 1} =$$

اس لیے ۱، ۲، ۳ اور لاگتا ہی پر کے باقیوں کا مجموعہ

$$= \frac{1}{1} - \frac{9}{2} + \frac{2}{1} - \frac{1}{2} =$$

۳۹- کوشی کا مسئلہ باقی —

فرض کرو کہ ف (ی) بند گھیراگ کے اندر اور اوپر مسلسل ہے اور سوائے
چند محدود قطب نقطوں کے جو گھیراگ کے اندر ہیں تھیلی ہے - تب

$$\int f(y) dy = \pi^2 x \sqrt{\quad}$$

جہاں $\sqrt{\quad}$ سے مراوگ کے اندر ف (ی) کے قطبوں پر باقیوں کا مجموعہ ہے۔
کوشی کے مسئلہ باقی سے بہت سے محدود تکملوں کی قیمتیں آسانی سے
تخلیق ہیں۔ یہ یاد رہے کہ کوشی کے باقی کے مسئلہ سے جن محدود تکملوں کی
قیمتیں نکال جاتی ہیں وہ دوسرے طریقے سے بھی نکالی جاسکتی ہیں۔ اس کے
برخلاف بہت سے سادہ تکملوں مثلاً $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx$ کی قیمت کوشی کے مسئلہ
سے معلوم نہیں کی جاسکتی۔

کوشی کے اس مسئلہ کی مدد سے محدود تکملوں کی قیمت معلوم کرنے کا
مضمون بہت بڑا ہے۔ بعض تکملوں کی قیمتیں نکالنے کے لیے بہت پیچیدہ بند
گھیرے لینے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ہم اتنی تفصیل سے یہاں بحث نہیں کریں گے
اس کے لیے طالب علم ملتف متغیر کے تفاعل کے نظریہ کی اعلیٰ کتابوں کا مطالعہ
کر سکتا ہے۔ ہم یہاں صرف ایسے تکملوں کی قیمتیں معلوم کریں گے جو سادہ بند گھیرے
مثلاً ایک بند دائرہ کا گھیرا یا بند نصف دائرہ کے گھیرے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال (۷) $\int f(y) dy$ کی قیمت معلوم کرو

$$|y| = 1$$

گھیرا $|y| = 1$ کے اندر اس تفاعل کا یعنی اکائی کا کوئی قطب نقطہ

نہیں ہے اس لیے کوشی کے مسئلہ سے تفاعل $\int f(y) dy = \text{صفر}$

$$|y| = 1$$

مثال (۸) $\int \frac{فری}{۲+ی} کی قیمت معلوم کرو جبکہ گھیرا ی = ۳ یا$

$ی = ۱$ ہو۔

اگر گھیرا $ی = ۳$ ہو تو تفاعل $\frac{۱}{۲+ی}$ کا اس گھیرے کے اندر ایک قطب $ی = ۲ -$ ہے۔

اس پر باقی نہ $۱ = \frac{۲+ی}{۲+ی} - \frac{۱}{۲-ی}$

اس لیے کوشی کے تکملی مسئلہ سے $\int \frac{فری}{۲+ی} = ۲\pi x$ $ی = ۳$

اگر گھیرا $ی = ۱$ ہو تو تفاعل $\frac{۱}{۲+ی}$ کا اس گھیرے کے اندر کوئی

قطب نہیں ہے کیونکہ اس کا صرف ایک قطب $ی = ۲ -$ ہے جو گھیرا $ی = ۱$ کے باہر ہے۔ اس لیے یہ تفاعل اس گھیرے کے اندر تحلیل ہے۔ اس لیے

$\int \frac{فری}{۱+ی} = صفر$ $ی = ۱$

مثال (۹) $\int \frac{فری}{(۳+ی)(۲+ی)} کی قیمت معلوم کرو جبکہ تکملہ گھیرا$

$ی = \frac{۵}{۴}$ پر لیا گیا ہے۔

اب $\frac{۱}{۳+ی} - \frac{۱}{۲+ی} = \frac{۱}{(۳+ی)(۲+ی)}$

اس لیے $\int \frac{فری}{(۳+ی)(۲+ی)} = \int \left\{ \frac{۱}{۳+ی} - \frac{۱}{۲+ی} \right\} فری$

اب تفاعل $\frac{1}{(3+Y)(2+Y)}$ کا گھیرا $|Y| = \frac{5}{4}$ کے اندر صرف ایک قطب $Y = -2$ ہے۔

اس لیے اس قطب پر باقی = نہا $\frac{(2+Y)}{(3+Y)(2+Y)} = 1$

اس لیے $\int \left\{ \frac{1}{2+Y} - \frac{1}{3+Y} \right\} dY = \pi i$ $Y = \frac{5}{4}$

مثال (۱۰) $\int \frac{Y dY}{(Y+1)(Y+2)}$ کی قیمت معلوم کرو جب کہ گھیرا

دائرہ $|Y| = 1$ ہو۔

اب تفاعل $\frac{Y}{(Y+1)(Y+2)} = \frac{2}{Y+1} - \frac{3}{Y+2}$

اس لیے $\int \left\{ \frac{2}{Y+1} - \frac{3}{Y+2} \right\} dY = \frac{Y dY}{(Y+1)(Y+2)}$ $|Y| = 1$

$\int \frac{1}{Y+1} dY - \int \frac{3}{Y+2} dY = \dots \dots \dots (1)$ $|Y| = 1$ $|Y| = 1$

گھیرا $|Y| = 1$ کے اندر $Y = -1$ اور $Y = -2$ اس کے دو قطب

ہیں اور ان پر باقی = نہا $\frac{Y}{(Y+1)(Y+2)} = \frac{1}{Y+1} - \frac{2}{Y+2}$

اور $\frac{2}{Y+2} = \frac{Y}{(Y+1)(Y+2)}$

$$\int \frac{y \, dy}{(y+1)(y+2)} = \frac{y}{(2-3)} \times \pi^2 = \pi^2 x$$

اگر (۱) سے قیمتیں معلوم کی جاتی تو بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا۔

۴۰۔ اکائی نصف قطر کے دائرہ کے گرد تکمل —

گھیرے تکملہ کی مدد سے ہم پہلے

فہ (جم طہ، جب طہ) فرطہ کی قسم کے تکملوں کی قیمت معلوم کرتے ہیں جہاں فہ (جم طہ، جب طہ) جم طہ اور جب طہ کا منطق تفاعل ہے۔
فرض کرو کہ $y = \frac{x}{y}$

$$\text{تب جم طہ} = \frac{1}{4} (y + \frac{1}{y}) \text{ جب طہ} = \frac{1}{2} (y - \frac{1}{y}) \text{ اور}$$

$$\frac{\text{فری}}{x} = \text{فرطہ}$$

$$\int \frac{y \, dy}{x} = \text{فہ (جم طہ، جب طہ) فرطہ} = \int \frac{y \, dy}{x}$$

جہاں سہ (ی)، ی کا منطق تفاعل ہے اور گھیراگ، اکائی دائرہ $|y| = 1$ ہے

$$\int \frac{y \, dy}{x} = \pi^2 x \quad \text{سہ (ی) فری}$$

جہاں π^2 سے مراد گھیراگ کے اندر سہ (ی) کے قطب نقطوں پر باقیوں کا مجموعہ ہے۔

مثال (۱۱) $\int \frac{مرطه}{(۱-۲ک جم طه + ک^۲)}$ کی قیمت معلوم کرو جہاں ک حقیقی، مثبت اور اکائی سے کم ہے۔
یعنی $۱ > ک > ۰$

درج کردی = $\frac{مرطه}{۲}$ ، تب جم طه = $\frac{۱}{۲}(۱ + \frac{۱}{ک})$ اور $\frac{مرطه}{خ می} =$
اب جیسے جیسے طه، صفر سے $\frac{۱}{۲}$ تک بدلتا ہے، نقطہ می، مرکز مبداء اور نصف قطر اکائی والا دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

اس لیے دیا ہوا تکملہ $\int \frac{مرطه}{(۱-۲ک جم طه + ک^۲)}$

گھیرا تکملہ $\int \frac{مرطه}{ک(۱-ک + \frac{۱}{ک}) + ک^۲}$ کے مساوی ہے جہاں
گھیرے تکملہ کو مثبت سمت میں اکائی دائرہ کے گرد لیا گیا ہے۔

$$\int \frac{مرطه}{ک(۱-ک + \frac{۱}{ک}) + ک^۲} = \int \frac{مرطه}{ک(۱-ک)(۱ + \frac{۱}{ک})}$$

$$= \int \frac{مرطه}{ک(۱-ک)(۱+ک)}$$

اب تکملہ ایک منطق تفاعل ہے جس کے سادہ قطب می = ک اور می = $\frac{۱}{ک}$ پر ہیں
دائرہ ای = ا کے گھیرے کے اندر اس کا صرف ایک قطب می = ک ہے۔
می = ک پر اس تفاعل کا باقی ہے۔

$$\frac{۱}{ک(۱-ک)} = \frac{(۱-ک)}{ک(۱-ک)(۱+ک)}$$

اس لیے کوشی کے مسئلہ باقی سے

ایک قطب ہے۔

$$\frac{1}{\text{ی} - \text{ع} - \text{ب}} = \frac{\text{ی} - \text{ع}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} = \frac{\text{ی}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} - \frac{\text{ع}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})}$$

اس پر باقی = نہا

اس لیے کوشی کے مسئلہ باقی سے

$$\int \frac{\text{مرطہ}}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}} = \int \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} = \frac{\text{مرطہ}}{1} = \text{مرطہ}$$

$$\int \frac{\text{مرطہ}}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}} = \int \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} = \frac{\text{مرطہ}}{1} = \text{مرطہ}$$

یعنی

$$\frac{\pi^2}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}} =$$

مثال (۱۳) $\int \frac{\pi^2}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}} =$ مرلا کی قیمت معلوم کرو جب کہ

ب بحر صفر

$$(1) \dots \frac{\text{مرطہ}}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}} = \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} = \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} + \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})}$$

مساوات نمبر ۱ کی بائیں جانب شمار کنندہ اور نسب نما کو $\frac{\text{مرطہ}}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}}$ سے ضرب

دو تب

$$\text{م} = \frac{\text{مرطہ}}{\text{ی} + \text{ب} - \text{ج} - \text{طہ}} = \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} = \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})} + \frac{\text{مرطہ}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{ب})}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ } ی = \text{قو}^{\text{غلہ}} ، \text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{خ}} = \text{مولا}$$

اس لیے جب لا، صفر سے $\pi\pi$ تک بدلتا ہے تو ی، اکائی نصف قطر کا دائرہ
مبداء کے گرو مقسم کرتا ہے۔

$$\text{اس لیے } \int \text{محم} \left[\frac{\text{لا} - \text{و} - \text{خ} - \text{ب}}{2} \right] \text{مولا} = \int \frac{\text{ی} + \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}}{\text{ی} - \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}} \times \frac{\text{فری}}{\text{ی}} \text{ای} = 1$$

تفاعل جس کو تکمل کرنا ہے اُس کے دو سادہ قطب ی = صفر اور

$$۱ = \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}} \text{ پر ہیں۔}$$

$$\text{اب } ی = \text{صفر پر باقی} = \frac{\text{نہا} (ی + \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}})}{\text{ی} - \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}} = 1$$

$$\text{اور } ی = \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}} \text{ پر باقی} = \frac{\text{نہا} (ی + \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}})}{\text{ی} - \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}} \times \frac{1}{ی}$$

$$= \frac{\text{نہا} (ی + \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}})}{\text{ی} - \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}} = 2$$

اس لیے ی = صفر اور ی = قو^{ب+وغلہ} پر باقی بالترتیب (۱-) اور (۲+) ہیں
اگر مثبت ہے، تو دونوں قطب تکمل کے راستہ کے اندر ہیں
اور اس صورت میں

$$\int \frac{\text{فری}}{\text{ی}} \times \frac{\text{ی} + \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}}{\text{ی} - \text{قو}^{\text{ب+وغلہ}}} \text{ای} = 1$$

$$= \pi\pi [2+1] \text{غلہ}$$

$$= \pi\pi \text{غلہ}$$

اگر ب منفی ہے، تو صرف ایک ہی قطب ی = ۰ گھیرا ای = ۱ کے اندر ہے۔ اس صورت میں

$$\int_{-y}^{y+y} \frac{y}{y} \times \frac{y+y}{y+y} = \pi \times (1-y) \quad |y| = 1$$

$$- \pi = \pi \times$$

اس لیے مطلوبہ مکملہ کی قیمت $\pm \pi \times$ ہے جیسے کہ ب مثبت ہے یا منفی اب ہم دوسری قسم کے مکملوں کی قیمتیں معلوم کریں گے۔

فرض کرو کہ ق (ی) کا ایسا تفاعل ہے جو ذیل کی شرطوں کو پورا کرتا ہے۔

(۱) ق (ی) اوپر کے نصف مستوی میں جزوی طور پر تحلیلی تفاعل ہے۔

(۲) حقیقی محور پر ق (ی) کے کوئی قطب نقطے نہیں ہیں۔

(۳) ی ق (ی) یکساں طور پر مائل بہ صفر جبکہ ای $\rightarrow \infty$ جبکہ

\geq دلیل ی $\geq \pi$

(۴) ق (لا) فرلا اور ق (لا) فرلا دونوں متدق ہیں۔ تب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi \times \pi = \pi \times \pi$$

جہاں π اوپر کے نصف مستوی میں ق (ی) کے قطب نقطوں پر کے باقیوں کا مجموعہ ہے۔

اس کے لیے اوپر کے نصف مستوی میں گھیرا ایک نصف دائرہ لو۔ جس کا مرکز مبداء پر ہے اور نصف قطر ہے۔

(۱) - r سے + r تک لا محور جہاں r بہت بڑا ہے -

(۲) نصف دائرہ $|y| = r$ جو لا محور کے اوپر واقع ہے - اس

گھیرے کے اندر Q (ی) کا صرف ایک قطب Q_1 ہے اس پر کا باقی ہے

$$\frac{1}{y - Q_1} = \left\{ \frac{Q_1}{y + Q_1} \right\} \quad (y - Q_1)$$

اس لیے $\int_{-r}^r Q_1 (Q_1 - Q_1) + \int_{-r}^r Q_1 (Q_1 - Q_1) \times Q_1$

$$\frac{1}{y - Q_1} \times \frac{\pi}{2} = \frac{Q_1}{y + Q_1} \times \frac{\pi}{2} =$$

$$\text{لیکن } \left| \int_{-r}^r Q_1 (Q_1 - Q_1) \times Q_1 \right| \geq \int_{-r}^r Q_1 (Q_1 - Q_1) \times Q_1$$

$$> \int_{-r}^r Q_1 (Q_1 - Q_1) \times Q_1 \text{ چونکہ } Q_1 > 1$$

$$> \frac{\pi}{2} \frac{r}{r - Q_1}$$

اس لیے نصف دائرہ کے گرد مکملہ مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ r مائل بہ لامتناہی ہو۔

$$\text{اس لیے } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1}{y + Q_1} = \frac{\pi}{2} \frac{r}{r - Q_1}$$

$$\text{یعنی } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1}{y + Q_1} = \frac{\pi}{2} \frac{r}{r - Q_1}$$

$$\text{حقیقی موصول کو مساوی رکھنے سے } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1}{y + Q_1} = \frac{\pi}{2} \frac{r}{r - Q_1}$$

مثال (۱۵) اگر $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2 + 1}$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

$$\text{اگر } y = \frac{1}{x^2 + 1} = (1 - \frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$$

اسیے متغیر کے سادہ قطب $\frac{1}{x^2 + 1}$ ، $\frac{1}{x^2 + 1}$ ، $\frac{1}{x^2 + 1}$ اور $\frac{1}{x^2 + 1}$ پر ہیں۔

اگر مثال (۱۰) کی طرح ہم $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ کو شکل (۳۸) کے نصف دائرہ کے گھیرے کے گرد مکمل کریں، تو اوپر کے نصف مستوی میں اس کے صرف دو قطب

$$\frac{1}{x^2 + 1} \text{ اور } \frac{1}{x^2 + 1} \text{ ہیں۔}$$

ق (ی) کے سب شرائط پورے ہوتے ہیں اس لیے اوپر کے مسئلہ سے

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi \right] \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi x^4}{(y-x^4)} \frac{\pi x^5}{(y-x^4)} \frac{\pi x^3}{(y-x^4)} \frac{\pi x}{(y-x^4)}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\pi x^4}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^5}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^3}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x}{(y-x^4)}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi x^4}{(y-x^4)} \frac{\pi x^5}{(y-x^4)} \frac{\pi x^3}{(y-x^4)} \frac{\pi x}{(y-x^4)}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right) \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right)} \times \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{(x+1) \frac{1}{y^2} \times x^2} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) \times \frac{x^2}{y^2} \times \frac{1}{y^2} \times x^2} \times \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \times \frac{(x-1)}{y^2} = \frac{(x-1)}{x^2 y^2} = \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1) \frac{1}{y^2}} \times \frac{1}{x^2} =$$

اسی طرح سے ی = $\frac{\pi x^2}{y^2}$ پر باقی

$$\left(\frac{\pi x^2}{y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\pi x^4}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^5}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^3}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x}{(y-x^4)}\right) \frac{\pi x^2}{y^2}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\pi x^4}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^5}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^3}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x}{(y-x^4)}\right) \left(\frac{\pi x^2}{y^2}\right)}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right) \left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right) \left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)} =$$

$$\frac{1}{(1-z^2) \sqrt{1-z^2} \times \sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \times \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} - \times \sqrt{1-z^2}} =$$

$$\frac{(z+1)}{z \times z \times \sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{(z-1) z \times \sqrt{1-z^2} \times z} =$$

اس لیے $\frac{\pi z}{z \times \sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{z \times \sqrt{1-z^2}}$ اور $\frac{\pi z}{z \times \sqrt{1-z^2}}$ پر باقیوں کا مجموعہ

$$\left[\frac{1}{z \times z \times \sqrt{1-z^2}} \right] \frac{1}{z \times z \times \sqrt{1-z^2}} =$$

$$\frac{1}{z \times z \times \sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{z \times z \times \sqrt{1-z^2}} =$$

$$\frac{1}{z \times z \times \sqrt{1-z^2}} \times \pi z = \frac{\pi}{z \times \sqrt{1-z^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z \times \sqrt{1-z^2}} =$$

$$\frac{\pi}{z \times \sqrt{1-z^2}} =$$

$$\frac{1}{z} \times \frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{z \times \sqrt{1-z^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z \times \sqrt{1-z^2}} =$$

امثلہ نمبری (۷)

$$(1) \text{ ثابت کرو کہ } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z \times \sqrt{1-z^2}} = \frac{(1-z^2)}{z}$$

$$(۲) \text{ ثابت کرو کہ } \int_0^1 \text{جم لای فری} = \frac{\text{جب لای}}{۱}$$

$$(۳) \text{ ثابت کرو کہ } \int_0^1 \text{خ} \pi \text{ پر } \frac{\text{وی}}{\text{وی}+۱} \text{ کا باقی} - \text{قو} \text{ خ} \pi \text{ ہے۔}$$

$$(۴) \text{ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ مم ی کا کس } \pi \text{ پر باقی ۱ ہے۔}$$

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{\text{قو غی}}{(\text{ی}+۱)^۲} \text{ اور } \frac{\text{وی}}{\text{ی}+۱} \text{ کے باقی } \text{خ} \text{ پر بالترتیب } \frac{\text{قو ل}}{۲} \text{ اور } \frac{\text{قو ل}}{۲} \text{ ہیں۔}$$

$$(۶) \text{ ثابت کرو کہ } \int_0^1 \frac{\pi^۲}{۱-\text{ل و لہ}} = \pi^۲ \text{ یا صفر بوجیب اسکے کہ } |ا| > |ایا| \text{ < صفر}$$

$$(۷) \text{ اگر } |ا| < |ب| < \text{صفر تو ثابت کرو کہ}$$

$$\int_0^1 \frac{\pi^۲}{ب+۱} \text{ جم لہ فرطه} = \frac{\pi^۲}{ب} \left\{ ۱ - \frac{۱}{ب+۱} \right\}$$

$$(۸) \int_0^1 \frac{\pi^۲}{ب+۱} \text{ جم لہ فرطه} = \frac{\pi}{ب+۱} (۰ < ۱)$$

نصف دائرے کے گہرے کے گرد مکمل کر کے ثابت کرو۔

$$(۹) \int_0^{\infty} \frac{\text{لا جب م لا}}{\text{لا}^۲+۱} \text{ فرلا} = \frac{\pi}{۲} \text{ قو } \frac{\text{لا}}{\text{لا}^۲+۱} \text{ جب } \frac{\text{لا}}{\text{لا}^۲+۱} = \text{ق (ی)} = \frac{\text{ی غ می}}{\text{ی}+۱} \text{ فرض کرو}$$

$$(۱۰) \int_0^{\infty} \frac{\text{جم م لا}}{\text{لا}^۲+۱} \text{ فرلا} = \frac{\pi}{۲} \text{ قو } \frac{\text{لا}}{\text{لا}^۲+۱} \text{ جب } \left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\text{لا}}{\text{لا}^۲+۱} \right)$$

$$(۱۱) \int_0^{\infty} \frac{\text{لا جم لا لا جب لا}}{\text{لا}^۲+۱} \text{ فرلا} = \pi^۲ \text{ قو } \left[\frac{\text{ق (ی)}}{\text{قو غی}} = \frac{\text{ق (ی)}}{\text{قو ل (خ)}} \right]$$

$$(12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi \quad \text{فرلا} = \text{صفر} \quad \left[\text{ق (ی)} = \frac{dx}{x^2 + 1} \right]$$

$$(13) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi \quad \text{فرلا} = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} \quad \text{جم} \quad \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \text{جہاں } m < 0.$$

$$(14) \text{ اگر } \pi > \frac{\pi}{2} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\text{لوک (ی-خ ی)} \right] \frac{dx}{(x^2 + 1)} \quad \text{کو نصف دائرہ کے گرد تکمل کرو}$$

$$(15) \text{ اگر } \pi \leq \text{صفر تو ثابت کرو کہ}$$

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi \quad \text{فرلا} = \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{3} \quad \text{جم} \quad \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi \quad \text{فرلا} = \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{3} \quad \text{جب } \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\left[\text{کو نصف دائرہ کے گرد تکمل کرو} \right] \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$(16) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi \quad \text{فرلا} = \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{3} \quad \text{جب } \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$(16) \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4} \text{ لوگ } (1 + \sin^2 \theta) \text{ اگر } 1 > \sin^2 \theta > 0$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{لوگ } (1 + \frac{1}{\sin^2 \theta}) \text{ اگر } 1 > \sin^2 \theta > 0$$

$$\left[\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \cdot \text{لوگ } (1 + \sin^2 \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ کو نصف دائرہ کے گرد تکمل}$$

کرو اور لکھو = مس ط

$$(18) \text{ ثابت کرو کہ } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta} d\theta \text{ فری کی قیمت معلوم کرو جہاں گ، دائرہ } |y| = \frac{1}{2} \text{ اور}$$

دائرہ } y | = 2 \text{ کو تعبیر کرتا ہے۔}

ثابت کرو کہ پہلی صورت میں تکملہ کی قیمت صفر ہے اور دوسری صورت میں

(-2π) ہے۔

اس سے اخذ کرو کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \text{صفر اور } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \text{صفر}$$

$$(20) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{(1 + \sin^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta)} d\theta \text{ فری کی قیمت معلوم کرو جہاں گ گھیرا } |y| = \frac{1}{2}$$

جہاں ف کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

یہ شرط ضروری ہے کیونکہ اگر اس کی انتہا ہو تو

$$| \text{م} + \text{ف} - \text{م} | \geq | \text{م} + \text{ف} - \text{ل} | + | \text{م} - \text{ل} |$$

یہ کافی بھی ہے کیونکہ اس میں یہ شرائط داخل ہیں

$$| \text{ل} + \text{ف} - \text{ل} | > | \text{م} + \text{ف} - \text{م} | + | \text{م} - \text{ل} |$$

جس سے توازن ملے گا اور م کا استدقاق معلوم ہوتا ہے۔

تواتروں کا یکساں استدقاق: — یہ ہو سکتا ہے کہ

تمام ہی متغیر ظ کے تفاعل ہوں۔ اس کو م کی بجائے م (ظ) لکھنے سے ظا ہر کرتے ہیں۔ تب اگر دیے ہوئے نقطہ کے اندر تمام نقطوں ظا کے لیے تواتر مستحق ہو اور اس کی انتہا (ظ) ہو، اور ایک ایسا م معلوم ہو سکے کہ اس رقبہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے م (ظ) - ل (ظ) > ص، جبکہ م تواتر کو اس نقطہ کے اندر یکساں طور پر مستحق کہتے ہیں۔

۴۴۔ سلسلوں کا استدقاق —

فرض کرو کہ دیا ہوا سلسلہ ہے۔

$$\frac{\infty}{1} = \text{م} + \text{م} + \text{م} + \dots + \text{م} + \dots + \text{م}$$

جہاں م = ع + غ و، اور ع اور غ حقیقی اعداد ہیں۔

فرض کرو کہ س، لاتنا ہی سلسلہ $\frac{\infty}{1}$ م کی پہلی ن رقموں کے

مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ یعنی

$$س_n = س_1 + س_2 + س_3 + \dots + س_n$$

تب اگر تواتر س_۱، س_۲، س_۳، س_n کی ایک محدود انتہا ہو تو سلسلہ

$\sum_{n=1}^{\infty} س_n$ کو مستند سلسلہ کہتے ہیں۔

اگر تواتر س_۱، س_۲، س_۳، س_n

کی ایک محدود انتہا س ہو تو س کو لاتناہی تک ملف سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} س_n$ کا مجموعہ کہتے ہیں۔

اگر س_n کی انتہا، جبکہ ن لاتناہی کی طرف مائل ہو وجود نہ رکھتی ہو،

تو ہم سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} س_n$ کو متسع سلسلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ (۱)۔ اس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ سلسلہ

$$س_1 + س_2 + س_3 + \dots + س_n + \dots$$

مستند ہو یہ ہے کہ کسی اختیاری چھوٹے مثبت عدد مہ کے جواب میں ایک ایسا عدد م

وجود رکھے کہ $|س_1 + س_2 + \dots + س_n + \dots + س_n| < م$ جبکہ ن > م

جہاں ف = ۱، ۲، ۳،۔

ثبوت: تواتر س_۱، س_۲، س_۳، س_n پر غور کرو۔

اس تواتر کے مستند ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ کسی مہ کے

جواب میں ایک صحیح عدد م ایسا وجود رکھے کہ $|س_1 + س_2 + \dots + س_n| < م$ جبکہ

ن > م، اور ف = ۱، ۲، ۳، (اسکو ہم نے ثابت کیا ہے)

اب سن اور سن+ف کی قیمتوں کی بجائے مھ کی متناظر قیمتیں کہنے سے
مطلوبہ شرط حاصل ہوتی ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

اگر مھ = (ع + خ و) تو سلسلے ع اور ع و حقیقی قیمتوں
ع اور و کی طرف مستحق ہونگے جہاں ع + خ و = س، کیونکہ

$$| \frac{ع}{ح} - ع | \text{ اور } | \frac{و}{ح} - و | \text{ دونوں } | س - سن | \text{ سے کم ہیں۔}$$

برعکس اس کے اگر سلسلے ع اور ع و، ع اور و کی طرف مستحق
ہوں، تو سلسلہ ع (ع + خ و) قیمت (ع + خ و) کی طرف مستحق ہوگا، چونکہ

$$| \frac{ع}{ح} - (ع + خ و) | \geq | \frac{و}{ح} - ع | + | \frac{و}{ح} - و |$$

یہ فوراً دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر ع یا ع و میں سے ایک بھی تسع ہو تو

$$ع = مھ = (ع + خ و) \text{ بھی تسع ہوگا۔}$$

مثال (۱) ع (ع + خ و) کے استنتاج یا اتساع پر غور کرو۔

$$ع = (ع + خ و) = (ع + \frac{1}{2}خ) + (\frac{1}{2}خ + \frac{1}{4}خ) + (\frac{1}{4}خ + \frac{1}{8}خ) + \dots$$

$$\text{یہاں } ع = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$و = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

سلسلہ ع تسع ہے اور ع و مستحق ہے۔

نسبتی جانچ اگر $\left| \frac{n-1}{n} \right|$ تو سلسلہ ∞ مطلق مستحق سلسلہ ہوگا۔

اگر $\left| \frac{n-1}{n} \right| < 1$ تو سلسلہ متعین ہوگا۔

اگر $\left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$ تو مزید جانچ کی ضرورت ہوتی ہے۔

ایک ایسی جانچ حسب ذیل ہے۔

$$\text{اگر } \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

جہاں n ایک مستقل ہے اور n کی تمام قیمتوں کے لیے $\left| \frac{n}{n+1} \right|$ ایک ثابت عدد

۲ سے کم ہے تو سلسلہ ∞ مستحق ہوگا اگر $n < 1$ اور متعین ہوگا اگر $n \geq 1$

مثال (۲) سلسلہ ∞ کے استدقاق پر بحث کرو

$$\text{جہاں } n = \frac{(1 + \frac{1}{n}) + (1 + \frac{1}{n^2})}{n}$$

مقیاسوں کا سلسلہ ہے $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$

نسبتی جانچ سے $\left| \frac{n}{n+1} \right| \times \frac{1+n}{1+n^2} = r$

اس لیے سلسلہ ∞ مستحق ہوگا اگر $r > 1$

یعنی سلسلہ مستحق ہے اگر $\left| \frac{n}{n+1} \right| > 1$

مثال (۳) سلسلہ ∞ کے مطلق استدقاق پر بحث کرو۔

ہم سلسلہ کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = x - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - \frac{x}{6} + \dots$$

$$\text{جس سے } \mathbb{Z} \text{ عن } = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right)$$

$$\mathbb{Z} \text{ عن } = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

$\mathbb{Z} \text{ عن } \text{ اور } \mathbb{Z} \text{ عن }'$ دونوں مستدق سلسلے ہیں۔

لیکن $\mathbb{Z} \text{ عن } | \text{ اور } \mathbb{Z} \text{ عن } |$ یعنی

$$\dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \text{ اور}$$

دونوں مطلق مستدق سلسلے نہیں ہیں۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ $\mathbb{Z} \text{ عن }'$ ، مطلق مستدق سلسلہ نہیں ہے۔

یہ اس طرح بھی واضح ہے کہ

$$\mathbb{Z} \text{ عن } | \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

جو تسع سلسلہ ہے۔

مثال (۴) ثابت کرو کہ اگر سلسلہ $\mathbb{Z} \text{ عن }'$ مطلق مستدق ہو تو

سلسلہ $\mathbb{Z} \text{ عن }'$ لوک (۱+عن) بھی مطلق مستدق ہوگا۔

ن کو اتنا بڑا منتخب کرو کہ $| \text{عن} | > 1$ تب

$$| \text{لوک} (1+\text{عن}) | \geq | \text{عن} | + \frac{| \text{عن} |^2}{2} \geq \frac{| \text{عن} |}{| \text{عن} | - 1}$$

اس لیے ایک ایسا م معلوم ہو سکتا ہے کہ جب $n \leq m$ تو

$$| \text{لوک} (1+\text{عن}) | \geq | \text{ج} | \text{عن} |$$

جہاں ج ایک مستقل ہے جو ن کے

اجزاء کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر میں ایک معین محدود انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ m اور n علیحدہ علیحدہ (یعنی غیر تطابق طور پر) لائٹنہی کے طرف مائل ہو اور یہ انتہا m اور n کے لائٹنہی کی طرف مائل ہونے کے طریقہ پر منحصر نہ ہو، یعنی اگر

$$\begin{matrix} n \\ \infty \leftarrow \\ m \end{matrix} = \begin{matrix} \infty \\ \infty \leftarrow \\ n \end{matrix} \dots (3)$$

تو کہا جاتا ہے کہ سلسلہ نمبر (۲) کی طرف مستقر ہوتا ہے اور وہ کو اس سلسلہ کا مجموعہ کہتے ہیں۔

اگر انتہا (۳) وجود نہ رکھتی ہو تو دوہرے سلسلہ کو قسع سلسلہ کہتے ہیں۔
اگر (۱) سے بننے والے سلسلہ کی ہر ایک رقم کا مقیاس لے کر (۱) کا مقیاسوں کا سلسلہ بنایا جائے اور یہ مقیاسوں کا سلسلہ مستقر ہو تو ابتدائی دیے ہوئے سلسلہ کو مطلقاً مستقر سلسلہ کہتے ہیں۔

دوہرے سلسلہ کا اشتقاق :-

اگر m اور n ایسی ملف مقداریں ہوں کہ $\left(\frac{m}{n}\right)$ حقیقی نہ ہو، تو دوہرے سلسلہ

$$\begin{matrix} \infty \leftarrow \\ m \end{matrix} = \frac{1}{\begin{matrix} \infty \leftarrow \\ n \end{matrix}} \dots (4)$$

مطلقاً مستقر ہے۔ زبر کی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ وہ رقم جس کے

لیے $m = n =$ صفر چھوڑ دی گئی ہے۔

[یہ فرض کرنا سہولت دہ ہے کہ $\frac{m}{n}$ کا خیالی حصہ صفر سے بڑا ہے۔

اگر ایسی صورت نہ ہو تو m اور n کو بدلو]

$$\begin{matrix} \infty \leftarrow \\ m \end{matrix} = \frac{1}{\begin{matrix} \infty \leftarrow \\ n \end{matrix}} \dots (5)$$

کی

بعض رقمیں ذیل کے قطار میں دکھائی گئی ہیں۔ بقیہ رقمیں بھی م اور ن کی قیمتیں بدلنے سے لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \frac{1}{3^2(سم)} + \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \dots \\
 & \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \frac{1}{3^2(سم)} + \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \frac{1}{3^2(سم+سم)} + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{3^2(سم)} + \frac{1}{3^2(سم)} + \dots + \frac{1}{3^2(سم)} + \frac{1}{3^2(سم)} + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \frac{1}{3^2(سم-سم)} + \dots
 \end{aligned}$$

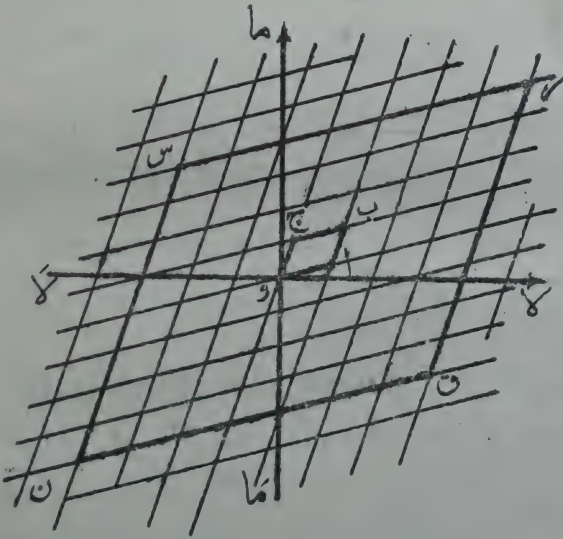
مستوی کو (شکل ۳۹) متوازی اور مساوی الفصل خطوں کے ذریعہ متوازی الاضلاع و ا ب ج کے مساوی اور متشابه متوازی الاضلاعوں میں تقسیم کرو جہاں ا، ب اور ج نقاط سم، (سم+سم) اور سم ہیں۔ چونکہ سم کا خیالی حصہ صفر سے بڑا ہے اس لیے زاویہ ا و ج صفر

اور ۳۳ کے درمیان ہوگا۔

سلسلہ کی ہر ایک رقم جال کے ایک ایک کونے کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لیے نقاط (سم+سم+سم) جہاں م اور ن صحیح اعداد ہیں ملطف مستوی پر تعبیر ہوتے ہیں۔

اُن کونوں پر غور کرو جو متوازی الاضلاع ن ق م اس پر واقع ہیں جن کے اضلاع کے وسطی نقاط \neq ع سم، \neq ع سم ہیں جہاں ع

ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ ہر ایک ضلع پر $(2 + 1)$ نقاط ہیں۔ اور چونکہ چار راستوں میں سے ہر ایک دو ضلعوں پر واقع ہیں اس لیے اس متوازی الاضلاع کے ۸ کونے ہیں۔



شکل (۳۹)

اب فرض کرو کہ و سے 'ا' اور 'ب' ج پر نکالے ہوئے عمودوں میں سے چھوٹے کا طول دے۔
تب ن ق س پر کے ہر ایک کونے کے لیے۔

$$\left| \frac{1}{2m^2 + 2n^2 + 3} \right| \geq \frac{1}{6}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{2m^2 + 2n^2 + 3} > \frac{1}{3(2)} = \frac{1}{6}$$

جہاں \geq کی علامت 'ن' ق' س پر کے تمام نقطوں کے لیے جمع کی تعبیر

کرتی ہے۔

اب اگر x کو یکے بعد دیگرے قیمتیں ۱، ۲، ۳، دیے جائیں تو مستوی کے تمام نقطے اس میں شامل ہونگے۔ اس لیے

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots > \frac{1}{2m^2 + 2n^2 + 3}$$

چونکہ دیے ہوئے سلسلہ کی ہر ایک رقم مطلق قیمت میں $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$

کے ہر ایک رقم سے کم ہے اور پورا سلسلہ $\frac{1}{3}$ یعنی ایک محدود مستحق سے ضرب کھاتا ہے اس لیے دیا ہوا دوہرا سلسلہ مطلق مستحق سلسلہ ہے۔

۴۴۔ یکساں استدقاق —

سلسلہ کے یکساں استدقاق کی تعریف -

سلسلہ $\dots + (y) + (y) + \dots + (y) + (y) + \dots$ جسکی رقمیں ملف متغیری کے تفاعل ہیں، مستوی کے ایک خطہ λ میں یکساں مستحق کہلاتا ہے اگر ہر مثبت عدد v کے جواب میں، خطہ λ کے اندری کی تمام قیمتوں کے لیے ایک ایسا مثبت صحیح عدد m جو y پر منحصر نہیں ہے وجود رکھے کہ

$$| \text{کان} | = | \text{عن}_1 (y) + \text{عن}_2 (y) + \dots | > \text{ص}$$

جبکہ $m \leq$

یہ یاد رہے کہ یکساں استدقاق کا خطہ، استدقاق کے خطہ پر لازماً منطبق نہیں ہوتا بلکہ استدقاق کے خطہ کا کوئی حصہ ہو سکتا ہے۔ یکساں استدقاق کی جانچ کے لیے ہم وارث شمس اس کے مسئلہ کی ثابت کرینگے۔ اس مسئلہ کی مدد سے اکثر سلسلوں کے یکساں استدقاق کی جانچ کی جاسکتی ہے۔

مسئلہ - فرض کرو کہ دیا ہوا سلسلہ ہے

$$e_1 (y) + e_2 (y) + \dots + e_n (y) + \dots$$

اگر ایک دیے ہوئے خطہ a میں m کی تمام قیمتوں کے لیے $| \text{عن}_1 (y) | \geq m$ ، n کی تمام قیمتوں کے لیے

جہاں \subset m ، مثبت مستقلوں والا متدق سلسلہ ہے تو \subset $\text{عن}_1 (y)$ خطہ a میں مطلق اور یکساں مستدق سلسلہ ہوگا۔

چونکہ $| \text{عن}_1 (y) | \geq m$ اور $\subset m$ مستدق ہے

اس لیے مطلق استدقاق کے تعریف ہی سے ظاہر ہے کہ دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستدق ہے۔ چونکہ سلسلہ $\subset m$ مستدق ہے، اس لیے ایک ایسا عدد m معلوم

کیا جاسکتا ہے کہ

$$\sum_{n=1}^{\infty} m > \text{ص}$$

نیز ہم لکھتے ہیں $| \sum_{n=1}^{\infty} \text{عن}_1 (y) | \geq \sum_{n=1}^{\infty} m > \text{ص}$ جہاں $f = 1, 2, 3, \dots$

جس سے حاصل ہوتا ہے

اسام (ی) = $\frac{1}{1+m}$ | $\frac{1}{1+m}$ عن (ی) | $\frac{1}{1+m}$ صہ جہاں | اسام (ی) | = $\frac{1}{1+m}$ | $\frac{1}{1+m}$ (ی) + ...
چونکہ یہ رشتہ خطہ ۱ میں ی کی کسی قیمت پر منحصر نہیں ہے اس لیے یکساں استدقاق کی شرط پوری ہوتی ہے۔

پس ثابت ہوا کہ دیا ہوا سلسلہ اوپر کے شرائط کے تحت خطہ ۴ میں مطلق اور یکساں مستدق سلسلہ ہے۔ یکساں استدقاق کے لیے یہ شرط کافی ہے، مگر ضروری نہیں۔

مثال (۵) سلسلہ $\frac{1}{5.3.1} + \frac{1}{4.5.3} + \frac{1}{9.4.5} + \dots$
ی ۱-۵ + $\frac{1}{(1-0.2)(1+0.2)(3+0.2)}$ کے یکساں استدقاق پر بحث کرو۔

یہ اس خطہ کے اندر جو مبدا کے گرد کھینچے ہوئے اکائی نصف قطر والے دائرے کے اندر ہے یکساں طور پر مستدق سلسلہ ہے۔

مثال (۶) سلسلہ ی - $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$
کسی محدود خطہ کے اندر یکساں مستدق سلسلہ ہے۔

۴۵۔ قوتی سلسلے

$\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \dots$ (ی-ی) کی شکل کے سلسلے قوتی سلسلے کہلاتے ہیں۔ اگر $\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \dots$ اور ی ملف مقدریں ہوں تو ان کو ملف رقموں کے قوتی سلسلے کہتے ہیں۔ چونکہ سلسلہ $\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \dots$ (ی-ی) کی شکل $\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \dots$ میں آسانی کے ساتھ تبدیل کیا جاسکتا ہے اس لیے ہم سلسلہ $\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \dots$ کو معیاری قوتی

نیز فرض کرو کہ $(ی) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1^{-n}$

سہولت کی خاطر ہم $| ی | = ر$ اور $| عا | = عا$ لکھتے ہیں۔ تب اگر $ر > ک$ اور $(ر + عا) > ک$

$$\left| \left\{ \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right\} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right\} n \cdot 1^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right\} n \cdot 1^{-n}$$

$$| اب | = \left| \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right| = \left| \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right| = \left| \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right|$$

$$\frac{ن (ن - 1) (ن - 2) \dots (ن - (ن - 1))}{2 \times 1} \geq \frac{ن (ن - 1) (ن - 2) \dots (ن - (ن - 1))}{2 \times 1}$$

$$= \frac{(ر + عا) - (ی)}{ع} - \frac{ن - 1}{ع}$$

$$\left| \left\{ \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right\} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(ی + عا) - (ی)}{ع} \right\} n \cdot 1^{-n}$$

$$= \left\{ \frac{ک}{ع} - \left(\frac{ک}{ع} - \frac{ک}{ع} \right) \right\} = \frac{ک ع}{(ک - ر) (ع - ک)}$$

$$\text{یعنی } \frac{ک ع}{(ک - ر) (ع - ک)} \leftarrow \text{صفر جبکہ عا} \leftarrow \text{صفر}$$

یعنی $(ی)$ کا مشتق $(ی)$ ہے۔

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $(ی)$ جو یک قیمتی ہے، تفرق پذیر بھی ہے۔

اس لیے $(ی)$ ، دائرہ $| ی | = ر$ کے اندر تحلیل ہے۔

$$\text{چونکہ } (ن) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1^{-n} \text{ ہے، اس لیے } (ن) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1^{-n} = \frac{1}{1 - 1} = 1$$

اور اس لیے سلسلہ فہ (ی) = $\frac{\infty}{1} \text{ ن ل ن ی ن - ۱}$ کا نصف قطر استدقاق

ابتدائی سلسلہ ف (ی) = $\frac{\infty}{1} \text{ ن ی ن}$ کے نصف قطر استدقاق کے مساوی ہے۔

اس طرح سے اگر فہ (ی) = ف (ی) 'ای' > ر کے اندر تحلیل ہو تو

اسی طرح سے بتا سکتے ہیں کہ فہ (ی) کا مشتق $\frac{\infty}{1} \text{ ن (ن - ۱) ل ن ی ن - ۲}$ ہے۔

اور اسی طرح سے دوسرے الفاظ میں ہم قوتی سلسلہ کو اس کے دائرہ استدقاق

کے اندر کسی نقطہ کے لیے جتنی مرتبہ چاہے رقم بہ رقم تفرق کر سکتے ہیں۔

بالکل اسی کے مثال مسئلہ تکمل کے لیے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

قوتی سلسلہ $\frac{\infty}{1} \text{ ن ی ن کو اس کے دائرہ استدقاق کے اندر کسی خطہ}$

کے لیے رقم بہ رقم تکمل کیا جاسکتا ہے۔

مثال (۶) سلسلہ ی - $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots$ کا

تفرقی سر معلوم کرو۔

کسی محدود خطہ کے اندر یہ سلسلہ ہموار مستدق ہے۔

اس کا مشتق سلسلہ ہے۔

۱ - $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots$

اس لیے دوسرا سلسلہ پہلے سلسلہ کے تفرقی سر کو تعبیر کرتا ہے جبکہ پہلے سلسلہ کو رقم بہ رقم تفرق کیا گیا ہے۔

مثال (۸) ثابت کرو کہ

$$\text{مست (ی)} = ی - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots$$

$$\text{اب فری (مست ی)} = \frac{۱}{۱+۱} = (۱+۱)^{-۱} = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

یہ قوتی سلسلہ ہے رقبہ (۰، ۱) کے اندر مستحق ہے اس لیے اس کو قمر بہ نرم شکل کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے

$$\text{کے } \frac{۱}{۱+۱} \text{ فری} = \text{کے } (۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots) \text{ فری}$$

$$\text{یعنی مست (ی)} = ی - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots$$

۴۶۔ لاتناہی حاصل ضرب

فرض کرو کہ ہمارے پاس

$$\dots\dots\dots (۱-۱۰۰), (۱+۱۰۰), \dots\dots\dots (۱+۱۰۰۰)$$

لاتناہی تو اترا ہے۔ پہلے نا اجزا کے حاصل ضرب کو

$$\prod_{k=1}^n (۱+۱۰^k) \equiv \prod_{k=1}^n$$

فرض کرو کہ ایک ایسا ثابت صحیح عدم وجود رکھتا ہے کہ جب ک بے م، تو

حاصل ضرب $\prod_{k=1}^n$ کا کوئی جزو ضربی صفر کے مساوی نہیں ہے۔ جب حاصل ضرب

$\prod_{k=1}^n$ کا کوئی جزوی ضربی صفر کے مساوی نہ ہو تو حاصل ضرب $\prod_{k=1}^n$ کو مستحق

کہتے ہیں اگر $\frac{n}{m} \neq 1$ (۱+ ص) وجود رکھتی ہو اور صفر سے مختلف ہو۔

اگر حاصل ضرب صفر کی طرف مائل ہو یا لاتناہی ہو جائے یا n کے بڑھنے پر اس کی کوئی انتہا نہ ہو تو لاتناہی حاصل ضرب تسع کہلاتا ہے۔

مسئلہ (۱) اس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ ایک لاتناہی حاصل ضرب مستحق ہو یہ ہے کہ ہر مثبت عدد m کے جواب میں ایک ایسا مثبت صحیح عدد n وجود رکھے کہ

$$n > \left| \frac{n+m}{1+m} - 1 \right| \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

حاصل ضربوں کے تواتر

$$(2) \quad \frac{n}{m} < \frac{n+m}{1+m} < \frac{n+2m}{1+2m} < \dots$$

پر غور کرو۔

اس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ یہ تواتر مستحق ہو یہ ہے کہ ہر مثبت عدد m کے جواب میں ایک ایسا صحیح عدد n وجود رکھے کہ

$$(3) \quad n < m < \frac{n}{m} < \frac{n+m}{1+m} < \frac{n+2m}{1+2m} < \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

اب ہم یہ بتائیں گے کہ یہ شرط وہی ہے جو مسئلہ (۱) میں دی گئی ہے۔ اگر دیا ہوا لاتناہی حاصل ضرب مستحق ہوں تو

$$\frac{n}{m} \neq 1 \quad \text{نہی}$$

تب ایک ایسا عدد m وجود رکھتا ہے کہ $n < m$ کی تمام قیمتوں کے لیے

(۴) $\left| \frac{N}{M} \right| < M$
 نمبر ۳ کو نمبر ۳ پر تقسیم کرنے سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\left| \frac{N}{M} \right| < M \quad \left| \frac{N}{M} \right| > \frac{M}{M} \quad \left| \frac{N}{M} \right| > 1$$

..... ف = ۱، ۲، ۳
 $\frac{M}{M} = M$ رکھنے سے نتیجہ کو شکل

..... $\left| \frac{N}{M} \right| > 1$
 میں لکھ سکتے ہیں جو مسئلہ میں دی ہوئی شرط ہے۔
 برعکس اس کے فرض کرو کہ ہم کو لاتساوی (۱) دی گئی ہے۔ ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\left| \frac{N}{M} \right| > 1 \quad \left| \frac{N}{M} \right| > \frac{M}{M}$$

لیکن شرط (۱) سے اور اوپر کے رشتہ سے حاصل ہوتا ہے

$$(۵) \quad \left| \frac{N}{M} \right| > M \quad \left| \frac{N}{M} \right| > \frac{M}{M}$$

یعنی $M > 1$

یا (۱) سے $\left| \frac{N}{M} \right| > (M+1)$
 فرض کرو کہ اب ہم N کو M سے بڑی کوئی معین قیمت (M+و) دیتے ہیں۔

چونکہ صہ اختیاری ہے اس لیے (۶) سے حاصل ہوتا ہے کہ تواتر (۲) کا

ہر جز $\frac{n}{m}$ ، مطلق قیمت میں n سے کم ہے جہاں n محدود تواتر

$$\left| \frac{n}{m} \right|, \left| \frac{n}{m} \right|, \dots, \left| \frac{n}{m} \right|, \left| \frac{n}{m} \right|, \left| \frac{n}{m} \right|$$

یہ سب سے بڑا مثبت عدد ہے اور کم صفر سے بڑا کوئی مستقل ہے۔
اسی طرح سے ۲ کا ہر جز ایک مثبت عدد n سے مطلق قیمت میں بڑا ہے

جہاں n ، محدود تواتر

$$\left| \frac{n}{m} \right|, \left| \frac{n}{m} \right|, \dots, \left| \frac{n}{m} \right|, \left| \frac{n}{m} \right|, \left| \frac{n}{m} \right|$$

میں سب سے چھوٹا عدد ہے۔

(۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\left| \frac{n}{m} - \frac{n}{m} \right| > \frac{n}{m} \quad \text{ف} = \frac{n}{m}, \frac{n}{m}, \dots$$

لیکن چونکہ $\left| \frac{n}{m} \right| > n$ ، اس لیے $\frac{n}{m} = \frac{n}{n}$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے (جہاں صہ

اختیاری چھوٹا عدد ہے)۔

$$\left| \frac{n}{m} - \frac{n}{m} \right| > \frac{n}{m} \quad \text{ف} = \frac{n}{m}, \frac{n}{m}, \dots$$

اس لیے (۳) میں دی ہوئی شرط پوری ہوتی ہے اور نہ ہی $\left| \frac{n}{m} \right|$ وجود رکھتی ہے

فرض کرو کہ یہ انتہا ۱ ہے چونکہ $\left| \frac{n}{m} \right|$ ہمیشہ مثبت عدد n سے بڑا ہے

اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ $1 \neq \text{صفر}$ ۔ اس لیے دیا ہوا تواتر مستحق ہے پس

اوپر کا مسئلہ ثابت ہوا۔

اگر حاصل ضرب ∞ $(+1 | \text{ھر} |)$ مستدق ہو تو حاصل ضرب ∞ $(+1 | \text{ھر} |)$ کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں۔

مسئلہ اگر سلسلہ ∞ $\frac{1}{1}$ مطلقاً مستدق ہو تو لاتنا ہی حاصل ضرب

∞ $(+1 | \text{ھر} |)$ مطلقاً مستدق ہوگا۔

سلسلہ ∞ $\frac{1}{1}$ کے استدق سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ ∞ $(+1 | \text{ھر} |)$ کے صرف محدود اجزائے ضربی صفر ہو سکتے ہیں۔ حسب سابق فرض کرو کہ جب ک ∞ م، تو حاصل ضرب ∞ $(+1 | \text{ھر} |)$ کا کوئی جزو ضربی صفر کے مساوی نہیں ہے۔ تب اگر $n < m$ تو ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) = \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) + \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) + \dots + \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) + \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) \quad (۷)$$

دیا ہوا حاصل ضرب مطلقاً مستدق ہوگا اگر سلسلہ

$$\text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) + \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) + \dots + \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) + \text{لوک } (+1 | \text{ھر} |) \quad (۸)$$

مستدق ہو۔ لیکن یہ سلسلہ مستدق ہوگا اگر سلسلہ

$$| \text{ھر} | + | \text{ھر} | + \dots + | \text{ھر} | + | \text{ھر} | \quad (۹)$$

مستدق ہو۔ کیونکہ ان دو سلسلوں کے عام رقموں کی نسبت

$$\text{لوک } \frac{(+1 | \text{ھر} |)}{| \text{ھر} |} \text{ مائل بہ ایک ہوتی ہے جب ک لاتنا ہی کی طرف}$$

مائل ہوتا ہے۔ چونکہ مفروضہ سے سلسلہ (۹) مستدق ہے اس لیے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - k y + \frac{k(3-k)}{2} y^2 - \frac{k(k-2)(5-k)}{3} y^3 + \dots$$

مستقل ہے اگر $|y| > \frac{1}{3}$

(۵) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 + \frac{y}{1} + \frac{2+y^2}{2} y^2 + \dots + \frac{(1+m+n)(2+m+n)\dots(3+m+n)}{n} y^n + \dots$$

مطلق مستقل ہے اگر $|y| > \frac{m}{1+m}$ جہاں m ایک مثبت صحیح عدد ہے۔(۶) ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ کی تمام قیمتوں کے لیے مستقلہے اگر $|y| > 1$

(۷) ذیل کے سلسلوں کے یکساں استدقاق پر بحث کرو۔

$$(1) 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y^n}{n} + \dots$$

$$(2) 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y^n}{n} + \dots$$

(۸) ثابت کرو کہ ذیل کے دو سلسلوں

$$(1) \frac{1-y}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1-y}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1-y}{3} \times \frac{5}{2} + \dots + \frac{1-y}{n} \times \frac{(2n-1)}{2} + \dots$$

$$(2) \frac{1-y}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1-y}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1-y}{3} \times \frac{5}{2} + \dots + \frac{1-y}{n} \times \frac{(2n-1)}{2} + \dots$$

کے استدقاق کے خطے (Regions of Convergence) مساوی ہیں۔

(۹) سلسلہ

$$1 + \frac{y}{3 \times 2 \times 1} + \frac{y^2}{5 \times 4 \times 3} + \frac{y^3}{7 \times 6 \times 5} + \dots$$

کو تفرق کر کے اس کے پہلے اور دوسرے تفرقی سلسلے معلوم کرو۔ نیز اس کی تصدیق کرو کہ تفرقی سلسلوں کا دائرہ استنتاج وہی ہے جو ابتدائی سلسلہ کا ہے۔

(۱۰) پھیلاؤ اخذ کرو۔

$$..... + \frac{5}{5} \times \frac{3 \times 1}{3 \times 2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{\text{فری}}{1 - 1/2} = \int \text{جیہ}^1 \text{ی}$$

$$..... + \frac{5}{3 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1}{2} = \frac{\text{فری}}{\text{جمی}}$$

$$..... + 1 - 1 + 1 = \frac{1}{1 + 1}$$

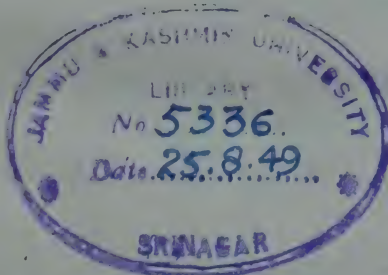
(۱۱) ثابت کرو کہ لاتناہی حاصل ضرب

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \text{ مطلقاً مستقر ہے۔}$$

(۱۲) ۲۲ کے ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{مطلق مستقر ہے اگر لہ } 2 - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2m+2n+1)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m}$$

۲



فہرست اصطلاحات

ملف متغیر کے تفاعل

A

Absolute convergence.

مطلق استدقاق

Amplitude.

ولیل (سعت)

Angular point.

کونہ (زاویہ نقطہ)

B

Barrier.

مرحد

Bilinear transformation.

دو خطی بدل (استحالہ)

Branches.

شاخیں

Branch points.

شخ نقطہ

C

Circle of convergence.

دائرہ استدقاق

Circuit.

دور

Circular function.

دائری تفاعل (مستدیر تفاعل)

Complex.

الملف

Complex number.

ملف عدد

Complex variable.

ملف متغیر

Conformal representation.

ہم شکل تعبیر

Conjugate.

مز دوج

Conjugate function.

مز دوج تفاعل

(Conjugate numbers.

مز دوج اعداد

Continuity.

تسلسل

Contour.

گھیرا (حائط)

Convergence.

استدقاق

Cross-cut.

ترجھی کاٹ

Curvilinear integral.

منحنی (منحنی خطی) تکملہ

D

Definite integral.

محدود تکملہ

Derivative.

مشتق

Direction.

رسمت

Divergent.

تنسج

Domain.

علاقہ

Double integral

دوہرہ تکملہ

Double series.

دوہرہ سلسلہ

E

Essential singularity

خاص نادریت (ندرت)

Exponential function

قوت نمائی تفاعل

F

Function.

تفاعل

G

Gradient.

دھمال (میلان)

H

Harmonic Function.

ہارمونیک تفاعل

Holomorphic.

تحلیلی (کل تحلیلی)

Hyperbolic function.

زائدی تفاعل

Hypergeometric series.

اعلیٰ ہندسی سلسلہ

I

Infinity.

لامتناہی (لاتناہی)

Integration.

تکمل

Inverse point.

مقلوب نقطہ

Inversion.

تقلیب

Isolated singularity.

جداگانہ نادریت (مجرد ندرت)

L

Limit.

انتہا

Linear transformation.

خطی بدل (خطی انتقال)

M

Magnitude.

مقدار (قدر)

Meromorphic function.

جزوی طور پر (جز) تحلیلی تفاعل

Modulus.

مقیاس

Multiply-connected regions.

ضعفی طور پر ملے ہوئے (ضعف مربوط) خطے

Multiply-valued function.

کثیر قیمتی تفاعل

N

Non-isolated.

غیر جداگانہ (غیر مجرد)

O

Ordinary point.

سادہ نقطہ

Orthogonal system.

علی القوائم نظام

P

Partial integration.

جزوی تکمل

Path of variation.

تغیر کا راستہ

Periodicity.

دوریت

Pole.

قطب

Power series.

قوتی سلسلہ

Principal value.

صدر قیمت

R

Radius of convergence.

نصف قطر استقامت

Rational.

منطقی (ناطق)

Ratio-test.

نسبتی جانچ

Region.

خطہ

S

Segment

مقطوعہ (قطعہ)

Sequence.

تواتر

Series.

سلسلہ

Simply-connected region.

سادہ طور پر ملا ہوا (ایکایتمی) خطہ

Singularity.

نادریت (ندرت)

T

Transformation.

بدل (استعمال)

U

Uniform continuity.

یکساں تسلسل

Uniform function.

یکساں (ہموار) تفاعل

V

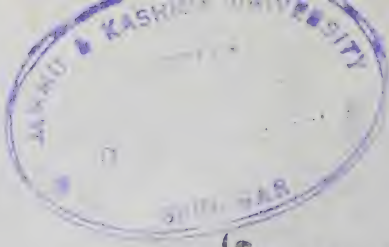
Vector.

سمتیہ (سمتی)

Z

Zero.

صفر

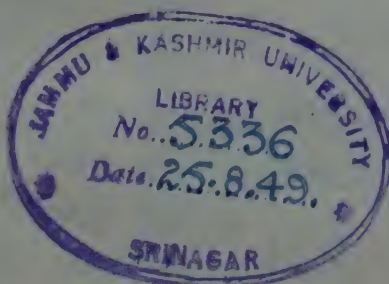


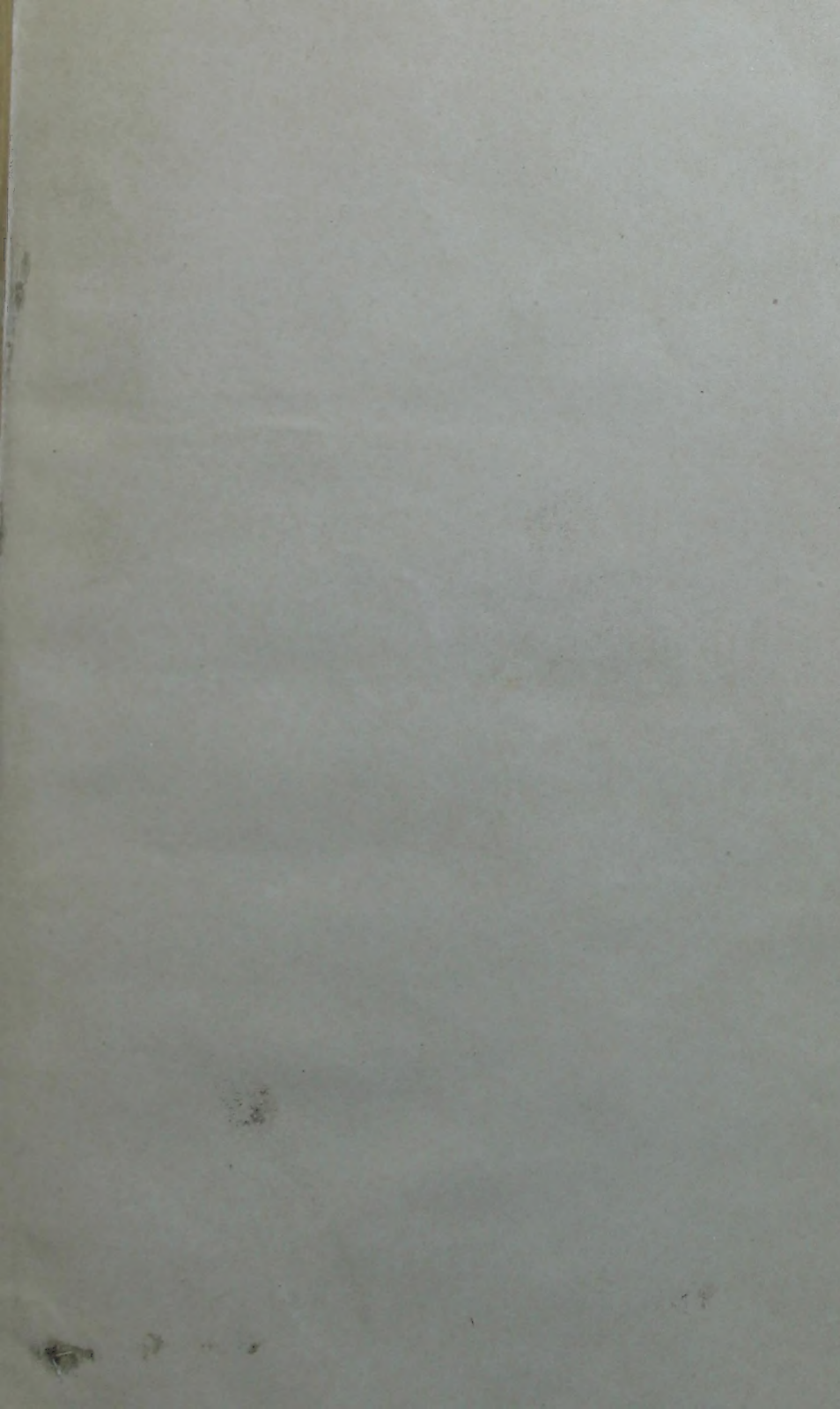
صحت نامہ

ملف متغیر کے تفاعل

صحیح	غلط	۱	۲	صحیح	غلط	۱	۲
نفر ہے	نفریہ	۱۹	۵۸	یگانہ	یگانا	۱۷	۴
+ مفلا	+ مفلا	۱۳	۶۳	فرق کا قیاس	فرق مقیاس	۱۲	۸
مکمل	مکمل	۱۸	۷۲	متشابه ہوں	متشابه ہو	۱۲	۱۶
قد (ی)	قد (بی)	۱۲	۷۳	۱- سن	۱- سن	۱	۲۵
ع + خ و	ع - خ و	۷	۷۶	خ جب ۱۳	خ جب ۱۳	۱۹	۳۰
تے کی	سے کوئی	۱۸	۷۸	Points	Points	۹	۳۱
اجزائے ضربی	اجزائی ضربی	۱۲	۸۵				
منحنی	میمنی	۱۲	۹۶	۱ + ج کم ط	۱ + ج کم ط	۶	۳۲
گرد	کرد	۱۰	۹۹	$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty}$	۱۱	۳۶
دو دفعہ حرکت کر	دو دفعہ کر	۱۲	۷				
اس طرح ی	اس طرح ی	۱۳	۱۰۰	$\left[\frac{(Y+Y')}{K} \right]$	$\left[\frac{(Y+Y')}{K} \right]$	۸	۳۸
میر	میر	۵	۱۰۱				
مس ۱/۲	مس ۱/۲	۱۲	۱۰۲	موخ	موخ	۱۲	۷
م کی قیمت م	م کی قیمت م	۱	۱۰۲	$\frac{(X+Y)}{N}$	$\frac{(X+Y)}{N}$	۱۰	۴۳
تفاعلوں کو	تفاعلوں کی	۱۲	۷				
ابدال	ابدل	۸	۱۰۸	خ (۲) ن	خ (۲) ن	۱	۴۸
عمل کر کے	عمل کے	۱۲	۱۱۰	مسا (م مسا)	مسا (م مسا)	۲	۷

صحیح	غلط	صفحہ	صفحہ	صحیح	غلط	صفحہ	صفحہ
مطلوبہ	مطلوبہ	۶	۱۶۸	لام = لا	لام = لا	۱۱	۱۱۲
$\frac{\pi \times 3}{3}$	$\frac{\pi \times 3}{3}$	۲	۱۷۲	اور = ب و خ ل	اور = ب و خ ل	۶	۱۱۸
$\frac{1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{6}$	۶	۱۷۳	ر = ی = ا = ۱	ر = ی = ا = ۱	۱۲	۱۲۵
∞	∞	۱۷۴	۱۷۴	خیال لینے سے	خیال لینے سے	۹	۱۲۹
تکمیل	تکمیل	۱۰	۱۷۴	مدد سے	مدد سے	۳	۱۳۵
$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty}$	۵	۱۸۱	د فرما	د فرما	۵	۱۳۵
تابع	تابع	۱	۱۸۵	بند گھیرا	بند گھیرا	۵	۱۵۰
استدقاق	استدقاق	۵	۱۹۳	اس پر بھی باقی	اس پر باقی	۱۸	۱۵۵
جتنی مرتبہ چاہے	جتنی مرتبہ چاہے	۸	۱۹۴	اندر ہے	اندر میں	۲	۱۶۰
$(1 + \infty)$	$(1 - \infty)$	۸	۱۹۶	نکالی باقی	نکال باقی	۷	۱۶۳
		۱۰	۱۹۷	کی جانبیں تو	کی جانبیں تو	۳	۱۶۴
				منکسر	منکسر	۱۲	۱۶۶
				$\frac{\text{خ (لا - و - خ - ب)}}{۲}$	$\frac{\text{خ (لا - و - خ - ب)}}{۲}$	۱۰	۱۶۶







**ALLAMA
IQBAL LIBRARY**

UNIVERSITY OF KASHMIR

**HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN**